Digitized by Google



7535
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio VI
Palchetto
Num.° d' ordine 43

NAZIONALE
B. Prov.
1457
NAPOLI
R. BIBLIOTECA VITT. EM. III

B. Prov.
II
1457-1458
altro esemplare a:
B. Prov. II 1954-55

Digitized by Google

Digitized by Google

ÉLÉMENS

D'ARITHMÉTIQUE

ET

D'ALGÈBRE.

TOME PREMIER.

Digitized by Google

Digitized by Google

610690

ÉLÉMENS D'ALGEBRE,

PAR CLAIRAUT,

SIXIEME EDITION,

Avec des Notes et des Additions très-étendues, par le citoyen GARNIER, professeur d'analyse à l'Ecole polytechnique. (*Avec Figures.*)

Précédés d'un traité d'Arithmétique, *par* THÉVENEAU, *avec une Instruction sur les nouveaux Poids et Mesures.*

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue Poupée-André-des-Arts, n°. 5.

AN X. = 1801.

Table des noms et de la valeur des Nombres en chiffres romains.

Un	I	j
Deux	II	ij
Trois	III	iij
Quatre	IV	iv
Cinq	V	v
Six	VI	vj
Sept	VII	vij
Huit	VIII	viij
Neuf	IX	ix
Dix	X	x
Vingt	XX	xx
Trente	XXX	xxx
Quarante	XL	xl
Cinquante	L	l
Soixante	LX	lx
Soixante-dix *	LXX	lxx
Quatre-vingt *	LXXX	lxxx
Quatre-vingt-dix *	XC	xc
Cent	C	c
Deux cents	CC	cc
Trois cents	CCC	ccc
Quatre cents	CCCC	cccc
Cinq cents	D	d
Six cents	DC	dc
Sept cents	DCC	dcc
Huit cents	DCCC	dccc
Neuf cents	DCCCC	dcccc
Mille	M	m
Onze cents	MC	mc
Douze cents	MCC	mcc
Treize cents	MCCC	mccc
Quatorze cents	MCCCC	mcccc
Quinze cents	MD	md

* Il seroit à desirer qu'au lieu de ces dénominations irrégulieres, on se servit comme en Suisse et dans les départemens environnans, des mots SEPTANTE, OCTANTE, NONANTE.

ÉLÉMENS


BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

D'ARITHMÉTIQUE.

Définitions préliminaires, et numération des nombres entiers.

1. Le mot *Arithmétique* dérive du Grec, et signifie science des nombres : en effet l'Arithmétique a pour but d'enseigner à résoudre différens problêmes, et à exécuter diverses opérations, qui concernent les nombres.

2. L'unité est le principe de tous les nombres : car il suffit de l'ajouter continuellement à elle-même, pour former tous les nombres.

3. Le nombre est donc la collection de plusieurs unités. La suite des nombres est illimitée : en effet, quelque grand que soit un nombre, on peut sur-le-champ, en assigner un autre plus grand que lui, puisqu'il ne faut pour cela que lui ajouter l'unité.

4. Le premier problême que les nombres présentent à résoudre, est leur numération. On appelle ainsi l'art dénoncer et d'écrire tous les nombres possibles, avec très-peu de mots et de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

On voit donc que ce problême offre deux parties, celle des noms, et celle des signes. La solution de la première date de temps fort reculés : car, sans remonter plus haut, les Grecs avoient les mots

déca, *hécaton*, *kilioi*, que les Romains ont traduits par *decem*, *centum*, *mille* ; dont nous avons fait nos mots, dix, cent et mille. La solution de la seconde partie est bien plus moderne, et est due aux Arabes.

5. La numération généralement adoptée, est la numération *décuple*, c'est-à-dire, celle où les mots et les chiffres expriment des nombres de dix en dix fois plus grands : sur quoi nous observerons que l'on auroit pu choisir tout autre nombre que dix, et que la préférence, qu'on lui a donnée sur tous les autres vient, dit-on, du nombre de nos doigts; ce qui est assez vraisemblable. Voyons d'abord la formation des nombres.

6. 1°. On a désigné par des noms différens, les neuf premiers nombres dont on a formé l'ordre des unités, et que, pour abréger, on a nommés, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit et neuf*, au lieu de dire, une unité, deux unités, trois unités. . . . . . neuf unités.

2°. Passé le nombre neuf, on a formé un nouvel ordre d'unités, qu'on a nommé dixaine, et de même qu'on avoit compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines inclusivement; mais pour abréger, au lieu de ces mots, une dixaine, deux dixaines. . . . . neuf dixaines, on a dit, *dix*, *vingt*, *trente*, *quarante*, *cinquante*, *soixante*, *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *et quatre-vingt-dix*. (1)

---

(1) Au lieu de ces trois noms *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre—vingt-dix*, il vaudroit bien mieux adopter les noms *septante*, *octante* et *nonante*, qui sont en usage dans plusieurs provinces de France : et cela par trois raisons;

3°. Comme il se trouve neuf nombres entre deux dixaines consécutives, entre trente et quarante, par exemple, pour les énoncer successivement, on ajoute au premier nom trente, les noms des unités depuis un jusqu'à neuf. Ainsi l'on dit trente-un, trente-deux, trente-trois..... trente-neuf. De même veut-on avoir les noms des neuf nombres compris entre neuf dixaines et dix dixaines inclusivement, on dira quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze....... quatre-vingt-dix-neuf; d'où l'on voit que quatre-vingt-dix-neuf est le plus grand des nombres qui ne renferment que des dixaines et des unités.

Il faut cependant excepter de la regle précédente, les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt; car on ne dit pas dix-un, dix-deux......... dix-six; mais on prononce onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize : passé lequel, par une exception assez bizarre, et qui n'est pas la seule en numération, (voyez la note), on dit dix-sept, dix-huit et dix-neuf.

4°. Après neuf dixaines et neuf unités, ou quatre-vingt-dix-neuf, viennent dix dixaines, dont on a fait un nouvel ordre sous le nom collectif de

---

1°. Parce qu'ils sont plus courts. 2°. Parce qu'ils sont plus conformes à l'analogie, qui veut qu'on dise septante, octante et nonante, comme on dit, cinquante, soixante, etc. 3°, Enfin parce qu'on éviteroit alors la bizarrerie de compter de vingt en vingt, depuis soixante jusqu'à quatre-vingts et depuis quatre-vingts jusqu'à cent; tandis que partout ailleurs on compte de dix en dix. Car alors on diroit, par exemple, septante-cinq, nonante-sept, au lieu de prononcer soixante-quinze, quatre-vingt-dix-sept, qui ne devroient pas plutôt se dire, qu'on ne dit, cinquante-douze, trente-onze, pour exprimer soixante-deux et quarante-un.

centaines, qui montent aussi depuis une centaine jusqu'à dix exclusivement, et que, pour abréger, on a nommées cent, deux cents........ neuf cents; et comme il est évident qu'il se trouve quatre-vingt dix-neuf nombres entre deux centaines qui se suivent; pour les obtenir successivement, on énonce, après le nom de la premiere, successivement aussi, un, deux, trois, jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf. Cette regle ne souffre pas d'exception; ainsi l'on voit, 1°. qu'on aura tous les nombres compris entre une et dix centaines, en disant, cent un, cent deux...... cent quatre-vingt-dix-neuf, deux cents, deux cent un, deux cent deux........... deux cent quatre-vingt-dix-neuf, trois cents, etc. 2°. Que neuf cent quatre-vingt-dix-neuf est le plus grand des nombres composés de centaines, de dixaines et d'unités.

5°. Ce qui précede suffit pour faire voir que, si on appelle un mille, la collection de dix centaines, on doit compter depuis un mille jusqu'à dix mille; qu'entre chaque mille il se trouve compris neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nombres; et que, pour énoncer tous les nombres compris entre mille et dix mille, il faut joindre successivement aux noms de chacun des neuf mille, ceux des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf nombres déjà connus.

6°. Il paroîtroit convenable à l'analogie, qu'on eût exprimé dix mille par un nouveau nom, à l'instar des Grecs qui l'appelloient *myriade*. Mais, dans la vue de restreindre le nombre des noms, et surtout (*voy.* 10) pour l'uniformité des tranches, on est convenu qu'on compteroit, sans en admettre de nouveaux, depuis un mille, jusqu'à mille mille, qu'on appelleroit alors un million.

Quant aux nombres compris dans cet intervalle, on voit qu'il est aisé de les obtenir, en étendant la méthode ci-dessus, depuis un mille, jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille inclusivement, au lieu de ne la faire monter qu'à dix mille, d'où l'on voit que le nombre, qui précede un million, s'énonce neuf cent quatre vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf

7°. De même que l'on a nommé million la collection de mille mille, on a donné le nom de billion à celle de mille millions, celui de trillion à mille billions : il est de même pour les noms quatrillion, quintillion, sextillion, septillion, octillion, nonillion, décillion, etc., qu'on a donnés à l'assemblage de mille unités de l'ordre inférieur. On voit de plus que pour obtenir tous les noms des nombres compris entre un million et un billion, il faudroit ajouter successivement, après les noms un million, deux millions. . . . neuf cent quatre-vingt-dix-neuf millions, les noms un, deux, etc. jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. On feroit de même pour obtenir les noms des nombres compris entre un billion et un trillion, car il suffiroit de nommer après les noms de chaque billion, depuis un jusqu'à mille, ceux qu'on connoît déjà.

Comme on peut continuer ainsi, jusqu'au terme qu'on voudra, il est donc prouvé d'abord que l'on sait énoncer tous les nombres possibles, avec très-peu de mots. Passons maintenant aux chiffres, qui font la seconde partie de la numération.

7. Nous avons vu que les anciens avoient réussi dans la solution de la premiere partie du probléme; mais il s'en faut bien qu'ils ayent été aussi heureux dans la découverte de la seconde : car leurs systêmes péchoient non-seulement par la trop grande

multiplicité, mais encore par la combinaison vicieuse de leurs chiffres. Cependant, le premier pas une fois fait, le second sembloit bien moins difficile. En effet, n'étoit-il pas assez naturel de suivre, pour les signes des nombres, la marche de leur énoncé? par conséquent, de n'admettre que neuf chiffres différens, comme on n'avoit admis que neuf noms primitifs; de répéter continuellement ces chiffres, comme on avoit continuellement répété ces noms; en un mot, d'exprimer par le même chiffre, comme on l'avoit énoncé par le même nom, un même nombre d'unités, de dixaines, de centaines, etc. mais, dira-t-on avec raison, le cas est bien différent; car ce sont précisément ces noms d'unités, de dixaines, etc. qu'on ajoute à la suite de tel nombre, de sept, par exemple, qui le fait valoir ou sept unités, ou sept dixaines, etc. tandis que rien, dans ce qu'on vient de dire, n'indique comment le même chiffre pourroit représenter sept unités de tel ou tel ordre.

Cette difficulté, d'autant plus grande, qu'elle consistoit en deux points, fut levée par les Arabes, qui en vinrent à bout, au moyen de deux expédiens fort ingénieux. Car d'abord ils imaginerent de faire valoir à un chiffre quelconque, tel ou tel ordre d'unités, par la place qu'il occuperoit: ainsi, après avoir représenté les neuf nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,
par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

ils convinrent que le premier chiffre sur la droite d'un nombre exprimeroit des unités, le second, des dixaines; le troisieme, le quatrieme, le cinquieme, le sixieme, etc. des centaines, des mille, des dixaines de mille, des centaines de mille, etc. Ainsi pour exprimer cinquante-quatre, ou cinq

dixaines et quatre unités, ils écrivirent 54. Pour exprimer six mille huit cent soixante-quatorze, ou six mille, huit centaines, sept dixaines et quatre unités, ils écrivirent 6874.

Réciproquement, s'agit-il d'énoncer un nombre, 596 par exemple? on voit que ce nombre vaut cinq centaines, neuf dixaines et six unités, c'est-à-dire, neuf cent quatre-vingt-seize.

9. Ce n'étoit pas tout; il restoit encore une classe assez considérable de nombres, qui échappoient à la regle précédente; et de cette espece étoient tous ceux qui manquoient d'un ou de plusieurs ordres d'unités. Tels étoient, par exemple, dix qui exprime une dixaine, sans unités simples; trois cent quatre, qui désigne trois centaines et quatre unités, sans dixaines; six mille trois, qui n'a ni centaines, ni dixaines. Mais après avoir résolu le premier genre de difficultés, ils durent bientôt sentir, qu'ils ne pourroient surmonter le second, qu'en inventant un nouveau signe, qui ne valût rien par lui-même, mais qui fût propre à conserver aux autres la place qui leur convenoit. Et telles sont en effet l'origine et la nature du chiffre auxiliaire *zéro*, qu'on écrit o. On écrira donc comme il suit 10; 304; 6003 les trois nombres ci-dessus dix, trois cent quatre, six mille trois, où l'on voit que les zéros tiennent la place des ordres d'unités qui manquent, et font par-là occuper aux autres chiffres les rangs qui leur conviennent.

10. Comme la généralité et l'abbréviation dans les regles sont deux qualités importantes de l'Arithmétique, nous allons exposer la maniere la plus générale, et en même tems la plus abrégée, de résoudre le double probléme de la numération., Mais pour mieux nous faire comprendre, prenons un nombre fort grand, le suivant, par exemple, qui contient

17 chiffres ; séparons-les ensuite de droite à gauche, en tranches de trois chiffres, sauf à n'en laisser que deux dans la derniere tranche sur la gauche, et enfin mettons à côté de chaque chiffre le nom de l'espece d'unité qu'il représente, on aura le tableau suivant, bien facile à former, d'après les notions ci-dessus,

3	6	5	1	5	8	0	4	5	9	0	7	6	7	9	1	7
dixaines.	unités.	centaines.	dixaines.	unités.	centaines.	dixaines.	unités.	centaines.	dixaines.	unités.	centaines.	dixaines.	unités.	centaines.	dixaines.	unités.
de quatrillons.		de trillions.			de billions.			de millions.			de mille.			d'unités.		

Avec un peu d'attention, on voit 1°. que les trois chiffres de chaque tranche expriment tous de droite à gauche, des unités, des dixaines et des centaines de l'ordre de la tranche à laquelle ils appartiennent ; et 2°. que cet ordre est indiqué par les noms unités, mille, millions, billions, trillions et quatrillions.

11. D'après ce qu'on vient de dire, il est aisé d'établir cette regle générale et abrégée, pour énoncer tout nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra. Séparez ce nombre en tranches de trois chiffres, en commençant par la droite ; énoncez ensuite, en commençant par la gauche, chaque tranche, comme si elle étoit seule ; mais à la fin de l'énoncé de chaque tranche, ajoutez le nom de cette tranche.

De cette regle, on conclura aisément que le nombre ci-dessus doit s'énoncer : trente-six | quatrillions, cinq cent quinze | trillions, huit cent qua-

tre | billions, cinq cent quatre-vingt-dix| millions, sept cent soixante-sept | mille, neuf cent dix-sept, unités. (On peut, pour abréger, supprimer le mot unités).

12. Il pourroit arriver qu'une ou plusieurs tranches ne continssent que des zéros; mais la regle ne changeroit pas pour cela; ils suffiroit d'omettre le nom de la tranche ou des tranches de cette espece : ainsi 36 000 973 s'énonceroit, trente-six millions neuf cent soixante-treize, en omettant le nom de la tranche des mille, qui ne contient que trois zéros. 7 000 069 000 000 001 s'énonceroit sept quatrillions soixante-neuf billions un, en supprimant les noms trillion, million, mille, des tranches où l'on ne voit que des zéros.

13. S'agit-il à présent d'écrire en chiffres un nombre énoncé? voici la regle générale : écrivez successivement par tranches de trois chiffres, les unités, dixaines et centaines qui composent les ordres des unités, des mille, millions, billions, etc., du nombre proposé; et écrivez une tranche de trois zéros, chaque fois qu'on aura omis le nom de l'un de ces ordres.

Veut-on, par exemple, écrire en chiffres quatre cent douze millions, huit cent six mille, trente-deux unités, on aura 412|806|032, en écrivant d'abord la tranche des unités, ou l'on mettra un zéro, pour tenir la place des centaines qui manquent dans l'énoncé; ensuite la tranche des mille, ou l'on remplacera par un zéro les dixaines de mille; et enfin, la tranche des millions, telle qu'elle est énoncée.

S'agit il d'exprimer seize trillions, six millions, dix-neuf; je l'écris ainsi, 16|000|006|000|019, en écrivant d'abord la tranche des unités, avec un zéro pour premier chiffre, en remplacement

des centaines ; ensuite une tranche de trois zéros, pour occuper la tranche des mille qui manquent dans l'énoncé ; après, la tranche des millions, en mettant deux zéros, pour tenir la place des dixaines et centaines de millions ; puis trois zéros, pour occuper la tranche des billions qui manquent ; enfin les deux chiffres 16, pour exprimer les unités et dixaines des trillions.

14. Comme les chiffres Romains se trouvent dans les dates, sur le frontispice des édifices publics, et surtout dans l'algebre de Clairaut, dont ils servent à numéroter les articles ; nous avons cru devoir finir ce chapitre, par une courte table de la valeur de ces chiffres.

I. vaut...... un.	LX vaut soixante.
II.......... deux.	LXX.. soixante-dix.
III.......... trois.	LXXX quatre-vingts.
IV.......... quatre.	XC.... quatre-vingt-dix.
V........... cinq.	C..... cent.
VI.......... six.	CC.... deux cents.
VII......... sept.	CCC.. trois cents.
VIII........ huit.	CCCC. quatre cents.
IX.......... neuf.	D..... cinq cents.
X........... dix.	DC.... six cents.
XX......... vingt.	DCC. . sept cents.
XXX....... trente.	DCCC. huit cents.
XL......... quarante.	DCCCC neuf cents.
L........... cinquante.	M..... mille.

15. Nous ne ferons sur cette numération que deux observations ; la premiere, que de même que quatre et six, quarante et soixante s'expriment par les chiffres inverses IV et VI, XL et LX, on devroit toujours écrire par analogie quatre-vingt-

dix et cent dix, quatre cents et six cents, etc., comme il suit, XC et CX, CD et DC, etc., aulieu des noms correspondans de la table ci-dessus.

La seconde que l'on peut aisément, avec ces nombres primitifs, trouver les nombres intermédiaires. Si j'avois; par exemple, à écrire en chiffres Romains le nombre 159, je le décomposerois en cent, en cinquante et en neuf, et prenant les chiffres correspondans C, puis L et enfin IX : je les rassemblerois et j'aurois CLIX, pour la valeur du nombre proposé.

De la numération des décimales, et des nouvelles unités.

16. Ce que nous avons dit jusqu'ici, ne concerne que les nombres *entiers*, c'est-à-dire, composés d'unités entieres; mais outre ces nombres, il existe encore les nombres *fractionnaires* et les *fractions*; ces derniers different entr'eux, en ce que les fractions ne contiennent que des parties de l'unité, et que les nombres fractionnaires sont composés d'entiers joints à des fractions : ainsi, une moitié, ou une demie, est une fraction; deux et une demie est un nombre fractionnaire. De plus, tous ces genres de nombres seront *abstraits*, s'ils ne désignent aucune chose en particulier, comme deux, une demie ; mais ils seront *concrets*, s'ils désignent une chose particuliere, comme deux marcs, une demi-heure.

17. Pour distinguer les anciennes mesures et les anciens poids, tels que la toise, le marc, etc. des nouvelles mesures et des nouveaux poids, tels que le metre, le gramme, etc. nous désignerons celles-là sous le nom d'anciennes unités, et celles-ci sous le nom de nouvelles unités. Nous parlerons

plus bas des valeurs et des rapports de ces diverses unités.

18. Les anciennes unités se divisent en nombres incomplexes et en nombres complexes. Un nombre est incomplexe, quand il n'énonce qu'une sorte d'unités, comme 6 toises, 8 marcs; il est au contraire complexe, quand il est composé de plusieurs sortes d'unités, toutes cependant réductibles à une seule : tels sont 6 livres 12 sols; nombre composé de livres et de sols, mais qu'on peut réduire tout en sols. Tel seroit encore le nombre 1 marc 4 onces 6 gros 62 grains, composé de quatre sortes d'unités, mais toutes réductibles en grains.

Les nouvelles unités se divisent en entieres et en décimales. Nous savons ce que sont les unités entieres. Voyons donc qu'elle est la nature des unités décimales, que, pour abréger, nous appelerons simplement décimales.

19. Les décimales sont de toutes les fractions, celles dont les calculs sont les plus simples, les plus uniformes et les plus commodes; ce qui vient de ce que sont aussi celles qui rentrent le plus dans le système de numération que nous avons adopté; et c'est ce que nous allons faire voir, après que nous aurons enseigné une regle fort simple, que suppose la théorie suivante : voici cette regle : toutes les fois qu'il s'agira de prendre 10, ou 100, ou 1000, etc. un certain nombre de fois, il suffira de mettre un, ou deux, ou trois zéros, etc. à la suite de ce nombre. Ainsi 10 fois 10 font 100, 6 fois 10 font 60, 9 fois cent font 900, 8 fois 1000 font 8000; cette regle dérive de la numération même, puisque 6 fois 10, par exemple, font 6 dixaines, et par conséquent 60, etc. cela posé, venons à la formation des décimales.

20. Ainsi qu'on a vu qu'une centaine étoit com-

posée de 10 dixaines, et une dixaine de 10 unités; de même on s'est représenté l'unité, soit abstraite, soit concrete, comme divisée en 10 parties égales, qu'on a nommées dixiemes, parce que chacune, étant dix fois plus petite que l'unité, n'en est que la dixieme partie. On a conçu ensuite le dixieme formé de dix parties égales, qui ont été appelées centiemes, parce que chaque partie, étant 10 fois plus petite que le dixieme, est 10 fois 10 fois, ou 100 fois plus petite que l'unité: on a imaginé encore que le centieme étoit subdivisé en 10 nouvelles parties égales, dont chacune a été nommée millieme, parce qu'étant 10 fois plus petite que le centieme, elle est 10 fois 100 fois, ou mille fois plus petite que l'unité. Si on suppose sucessivement le millieme partagé en dix dix-milliemes, le dix-millieme en dix cent-milliemes, le cent-millieme en dix millioniemes, etc. on aura la suite des diverses quantités qu'on appelle décimales. Les décimales sont donc *des quantités de dix en dix fois plus petites que l'unité.*

21. La nature des décimales étant bien conçue, il ne reste plus qu'à savoir les assujétir aux principes de la numération; or, c'est ce qui est fort aisé: en effet on vient de voir qu'il existe la même échelle de numération non-interrompue entre les unités entieres et décimales: de plus, on sait que dans la numération, chaque ordre d'unités devient de dix en dix fois plus petit, en avançant sur la droite. Il faudra donc mettre les dixiemes à la droite des unités, les centiemes à la droite des dixiemes, etc. ainsi pour écrire six unités, huit dixiemes, sept centiemes, il faudroit mettre 687; mais comme alors on pourroit confondre ce nombre avec 687 unités, on met une virgule à la droite des unités 6, et l'on écrit 6,87.

22. S'il se trouvoit manquer un certain ordre de décimales; comme des dixiemes, ou des centiemes, etc. on mettroit un zéro à leur place; ainsi a-t-on à écrire douze unités et huit centiemes, on écrira 12,08, en mettant un zéro pour tenir la place des dixiemes qui manquent. On mettroit 5,007 pour écrire 5 entiers, 7 milliemes; et les deux zéros mis à la place des dixiemes et des centiemes qui manquent, feroient valoir au chiffre 7 des milliemes; enfin s'il n'y avoit pas d'unités entieres, on mettroit encore un zéro à leur place, c'est-à-dire, avant la virgule: ainsi pour écrire 2 dixiemes 8 centiemes, on mettroit 0,28, et le zéro indiqueroit que le nombre 0,28 ne renferme pas d'unités.

23. Les mots dixieme, centieme, millieme, dix-millieme, cent-millieme, millionieme, etc. s'appliquent aux unités tant abstraites qu'anciennes; mais on a abrégé ces noms pour les nouvelles unités, et on les appelle déci, centi, milli, dix-milli, cent-milli, millioni, etc., auxquels on joint le nom de la nouvelle unité dont il s'agit; ainsi l'on dit décimetre, centigramme, millimetre.... millionigramme; il faut cependant excepter le franc, dont les subdivisions, au lieu de s'appeler déci-francs, centi francs, milli-francs, etc. se nomment décimes, centimes, millimes, etc.; du reste, ce qu'on a enseigné ci-dessus pour écrire un nombre décimal, s'applique de même aux nouvelles unités; ainsi veut-on écrire 8 metres, 6 décimetres, 9 centimetres, 8 dix-millimetres, on mettra 8^{mt},6908, en mettant un zéro à la place des millimetres qui manquent. Veut-on encore exprimer 6 décigrammes, 8 centigrammes, on écrira 0,^{gr}68, en mettant un zéro pour tenir la place des entiers de grammes qui manquent. Dans les deux cas, on

a mis au-dessus du chiffre des unités les lettres *mt.* et *gr.* abrégés des mots metres et grammes.

24. Ce ne sont pas seulement les noms de dixieme, de centieme, etc. qu'on a abrégés en faveur des nouvelles unités ; on a encore abrégé ceux de dixaine, de centaine, de mille et de dix mille, qu'on a nommés *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria*, tirés du grec (4). Ainsi pour dire une dixaine de metres, on dit un décametre ; une centaine de grammes, un hectogramme, etc. Le tableau suivant sera propre à fixer dans la mémoire, et ces noms et leur valeur.

millioniemes....	4	millioni.
cent milliemes...	9	cent milli.
dix milliemes....	7	dimilli.
milliemes.......	5	milli.
centiemes.......	4	centi.
dixiemes.........	3	déci.
unités..........	6,	unités.
dixaines.........	9	déca.
centaines.......	5	hecto.
mille..........	4	kilo.
dixaines de mille	3	myria.

Metres ou grammes, ou etc.

25. Ce n'est pas que, d'après ce tableau, il faille énoncer un nombre tel que $526^{mt},365$ de la maniere suivante : 5 hectometres 2 décametres 6 metres, 3 décimetres 6 centimetres 5 millimetres ; car, outre qu'on doit énoncer d'abord les entiers

ainsi, 526 metres, comme on diroit 526 entiers, si le nombre étoit abstrait, et 526 toises, ou 526 marcs, etc. s'il s'agissoit d'anciennes unités : nous allons faire voir que 365, peut et doit, à cause de la briéveté, s'énoncer en général 365 milliemes, et par conséquent ici 365 millimetres. En effet, chaque dixieme valant dix centiemes, et chaque centieme valant dix miliemes, un dixieme vaut 100 milliemes (19) : donc les 3 dixiemes valent 3 fois 100 milliemes, ou 300 milliemes; de plus les 6 centiemes font 6 fois 10 centiemes ou 60 centiemes; on a donc en tout 300 milliemes, plus 60 milliemes, plus 5 milliemes, ce qui fait évidemment 365 milliemes; donc le nombre de metres ci-dessus doit s'énoncer 526 metres, 365 millimetres.

Nous allons plus loin, et nous disons qu'il peut encore s'énoncer ainsi : cinq cent vingt six mille, trois cent soixante cinq millimetres. Car un entier valant 10 dixiemes, et par conséquent 100 centiemes et 1000 milliemes, 6 entiers valent 6 fois 1000 ou 6000 milliemes, d'où il suit que 10 entiers valent 10 fois 1000 ou 10000 milliemes, et par conséquent les 20 entiers, ou les 2 dixaines, valent 20000 miliemes; enfin, la centaine valant 10 dixaines, et la dixaine 10000 milliemes, une centaine vaut 100000 milliemes; les 5 centaines valent donc 500000 milliemes; rassemblant donc les 500000, les 20000, les 6000 et les 365 milliemes, on a évidemment 526365 milliemes, et par conséquent 526365 millimetres pour le cas ci-dessus.

Il suit delà, 1°. que l'on peut énoncer de deux manieres un nombre décimal écrit, savoir, ou en séparant l'énoncé des nombres entiers de celui des nombres décimaux, ou en confondant ces deux énoncés; 2°. que l'on ne peut écrire que d'une façon

un

PRÉFACE.

In tenui labor, et tenuissima gloria.......

FAIRE un ouvrage qui servît d'introduction à l'Algebre de *Clairaut*, où, dès les premieres pages, on initiât les commençants dans le nouveau systême des poids et mesures, où enfin on donnât, à chaque opération de l'Arithmétique, toute la briéveté dont elle est susceptible, tel est le triple but que l'on s'est proposé : est-il atteint ? c'est au lecteur à en décider.

TABLE DES MATIERES.

un nombre décimal énoncé de l'une ou de l'autre des deux manieres ci dessus. Cette distinction offre deux regles différentes, pour les deux cas des problêmes suivans, analogues à ceux qu'on a résolus pour les nombres entiers.

26. *Problême premier.* Enoncer un nombre décimal écrit.

Premiere maniere. Enoncez d'abord les entiers, et ensuite les chiffres décimaux, comme s'ils marquoient des entiers; mais à la fin vous énoncerez la derniere espece de décimales, espece que vous obtiendrez, en comptant sur chaque chiffre décimal, à partir de la virgule, les noms suivans dixiemes, centiemes, etc.

Deuxieme maniere. Enoncez tout le nombre, comme s'il exprimoit des entiers, et ensuite achevez comme pour la premiere maniere.

Par exemple, soit à énoncer 493,6457 : par la premiere maniere, on dira 493 entiers, 6 mille 457 dix milliemes, en énonçant d'abord les 493 entiers séparément, et ensuite les chiffres suivans 6457, comme s'ils étoient des entiers; mais en prononçant à la fin le mot dix milliemes, nom de la derniere espece de décimales, qu'on obtient en comptant depuis la virgule les mots dixieme, centieme, millieme et dix millieme sur les chiffres 6,4,5,7. En se servant de la seconde maniere, on aura 4 millions 936 mille 457 dix-milliemes, qui se trouvent en comptant le nombre donné, comme s'il étoit 4|936|457 entiers, et en achevant comme ci-dessus. De même on pourroit énoncer le nombre de metres suivant, 50040^{mt},001204 ou 50 mille 40 metres, mille 204 millionimetres, ou bien 50 billions, 40 millions, mille 204 millionimetres.

S'il n'y avoit que 0 avant la virgule, c'est qu'il n'y auroit pas d'entiers; alors les deux manieres ren-

treroient l'une dans l'autre : ainsi 0gr,30100303004 s'énonceroit également des deux manieres, 30 billions, 100 millions, 303 mille, 4 cent-billionigrammes.

27. *Problême II.* Ecrire un nombre décimal énoncé.

Premier cas, si l'on a confondu l'énoncé des nombres entiers et décimaux, alors, écrivez le nombre donné, comme s'il ne s'agissoit pas de décimales; mais ensuite, à partir de la droite, comptez sur chaque chiffre les noms dixiemes, centieme, etc. jusqu'à ce que vous arriviez à l'espece de décimale énoncée, et mettez une virgule après le chiffre qui lui correspond. Ainsi si l'on donnoit à écrire le nombre suivant, 12 millions, 27 mille, 118 millioniemes, j'écrirois 12|027|118, comme s'il ne s'agissoit pas de millioniemes; mais ensuite à partir du 8, je compterois dixieme, centieme, jusqu'à ce que j'en fusse aux millioniemes, et mettant une virgule après le chiffre o qui lui correspond, il viendroit enfin 12,027118. De même on verroit que 1 billion, 12 mille, 54 millimetres; s'écriroient 1000012,054.

Deuxieme cas; si l'on a séparé l'énoncé des nombres entiers et décimaux, écrivez d'abord les nombres entiers, et ensuite les décimaux, comme s'ils étoient des entiers, et ayant séparé les deux especes de chiffres par une virgule; comptez, à partir du premier chiffre décimal à droite, jusqu'à la virgule sur chacun d'eux, les mots dixieme, centieme, etc., et si par hasard leur nombre ne suffit pas pour arriver jusqu'à la décimale énoncée, suppléez-y par des zéros, placés entre le premier chiffre décimal à gauche et la virgule. Ainsi si l'on donnoit à écrire 12 unités, 27 mille, 118 millioniemes; j'écrirois d'abord les

12 entiers, que je ferois suivre de la virgule; ensuite j'écrirois 27 mille 118 comme il suit 27118; et j'aurois en tout 12,27118; puis comptant, à partir du 8 jusqu'à la virgule, je dirois dixieme, centieme..... cent millieme; comme il faudroit encore un chiffre pour arriver aux millioniemes, j'intercalerois un zéro, entre la virgule et le 2, et j'aurois 12,027118; ce qui sert de preuve à l'exemple correspondant, résolu de la premiere maniere.

S'il ne devoit pas y avoir d'unités entieres dans le nombre proposé, alors les deux cas reviendroient au même, et la regle se réduiroit à la derniere, à l'exception que n'ayant pas d'entiers à écrire, on mettroit à leur place un zéro. Si l'on avoit, par exemple, à écrire 21 millions 64 mille 12 bilionigrammes, on écriroit d'abord 21|064|012, et ensuite, d'après la seconde regle, 0^{gr},021064012. De même 6 cent-millionimetres s'écriroient 0^{mt},00000006. Observons relativement à cet exemple, qu'il faut bien se garder de confondre six cents milliemes, par exemple, avec six cent-milliemes; car le premier s'écrit 0,600, et le second 0,00006; ce qui est bien différent.

Nous avons insisté sur les différens cas de la numération des décimales, parce que nous avons remarqué qu'il en est beaucoup qui embarrassent les commençans.

28. Si, à partir de la virgule, on divise, en tranches de trois chiffres, un nombre composé de beaucoup de chiffres décimaux, on verra dans l'instant que le premier chiffre à droite de chaque tranche, exprime successivement des milliemes, millioniemes, billioniemes, trillioniemes, etc. d'où il suit que pour énoncer, plus briévement que ci-dessus, la plus basse espèce de décimales d'un nombre proposé, il faut séparer ce nombre comme

il vient d'être dit. Ainsi soit donné le nombre 0,410511000012016 : pour l'énoncer le plus briévement possible, on le séparera comme il suit : 0,410|511|000|012|016| et on verra aussi-tôt qu'il s'agit de quatrillioniemes. S'il étoit resté après la derniere tranche à droite 1 ou 2 chiffres, alors on auroit eû des dix ou des cent-quatrillioniemes.

29. Tout ce qui précede, fait voir que la numération d'un nombre décimal dépend et de la quantité des chiffres décimaux, et de la place de la virgule. Examinons donc les changemens que peut subir un nombre décimal, quand on change 1°. le nombre de ses chiffres décimaux; 2°. la place de la virgule. D'abord il est clair qu'on ne peut changer le nombre de ses chiffres décimaux, que lorsqu'on lui en ajoute, ou qu'on lui en retranche un certain nombre, et que ceux-ci ne peuvent être que des zéros ou des chiffres *significatifs.*, (on appelle ainsi tout chiffre autre que zéro), ce qui forme quatre cas, qui trouveront tous leurs solutions dans l'article suivant.

30. Puisque dans tout nombre décimal, (25) dans 24,56, par exemple, la partie entiere 24 ne varie pas tant que la virgule ne change pas de place, il suit que le changement que peut subir le nombre total 24,56 ne peut dépendre que de celui des décimales. Cela posé, on sait (25) que les 56 centiemes ci-dessus valent aussi 560 milliemes, ou 5600 dix milliemes, ou etc. donc aussi 24, 56 vaut 24, 560 et 24, 5600, et etc. donc réciproquement 24, 5600 vaut 24, 560, et 24, 56.

D'un autre côté, il est clair que si à la suite de 56, on ajoutoit des chiffres significatifs, les deux chiffres 28, par exemple, l'on auroit 5628 dix milliemes, évidemment plus grands que 5600 dix-milliemes, de 28 dix-milliemes, et que par conséquent

tout le nombre 24, 5628 seroit plus grand de cette quantité que 24, 5600 ou que son égal 24, 56. On voit de même que si on ôtoit le chiffre 6 de 56 on n'auroit plus que 5 dixiemes, qui ne valant que 50 centiemes, seroit plus petit de 6 centiemes que les 56 centiemes; donc 24, 5 seroit plus petit de cette quantité que 24, 56. D'où il suit:

31. 1°. Que l'on n'altere pas la valeur d'un nombre décimal, lorsqu'on ajoute à la suite de son dernier chiffre, un nombre quelconque de zéros.

2°. Qu'on n'altere pas la valeur d'un nombre décimal, lorsqu'on supprime tous les zéros qui le terminent.

3°. Qu'on augmente ou qu'on diminue la valeur d'un nombre décimal, quand on lui ajoute ou qu'on en ôte un ou plusieurs chiffres significatifs.

Voyons maintenant les changemens qu'opere dans un nombre décimal le déplacement de la virgule.

32. 1°. Si on avance la virgule d'un, deux, trois, etc, rangs vers la droite, on rend le nombre dix, cent, mille, etc. fois plus grand; en effet, soit, par exemple, le nombre: 326,429. Si d'abord l'on n'avance la virgule que d'un rang vers la droite, ce nombre deviendra 3264, 29, où l'on voit que les centaines sont devenues des mille; les dixaines, des centaines; les unités, des dixaines; les dixiemes, des unités; les centiemes, des dixiemes; et enfin les milliemes, des centiemes: donc chaque partie du nombre proposé est devenue dix fois plus grande: le nombre total lui-même est donc devenu dix fois plus grand: si ensuite dans le nouveau nombre 3264, 29 on avance encore la virgule d'un rang vers la droite, on aura 32642, 9 que l'on prouvera, comme ci-dessus, être dix fois plus grand que 3264, 29; mais celui-ci est dix fois plus grand que 326,429; donc 32642, 9 est cent fois plus grand que le nombre

proposé : on prouveroit de même qu'en avançant la virgule de trois, quatre, etc. rangs vers la droite, le nombre deviendroit mille fois, dix mille etc. fois plus grand :

Donc pour rendre un nombre décimal 10,100,1000 etc. fois plus grand, il ne faut qu'avancer la virgule de 1, 2, 3, etc. rangs vers la droite. Ainsi, pour rendre le nombre 32,478 cent fois plus grand, j'écris 3247,8. Pour rendre 0,427 mille fois plus grand, j'écris 427. Enfin, pour rendre 0,001001, cent mille fois plus grand, j'écris 100,1.

33. 2°. Si dans un nombre décimal, on recule la virgule d'un, deux, trois, etc. rangs vers la gauche, le nombre deviendra 10.100,1000 etc. fois plus petit. En raisonnant pour ce second cas, sur un nombre quelconque, d'une maniere absolument analogue au premier, on feroit voir d'abord qu'en reculant la virgule d'un rang vers la gauche, chaque partie du nombre proposé deviendroit dix fois plus petite ; et le nombre lui-même dès-lors dix fois plus petit. Quant au reste de la démonstration, il seroit le même, en changeant les mots plus grand en plus petit, et avancer vers la droite, en reculer vers la gauche.

Delà il suit, que pour rendre un nombre décimal 10,100,1000 etc. fois plus petit, il faut reculer la virgule de 1, 2, 3, etc. rangs vers la gauche : ainsi, pour rendre 421,24 cent fois plus petit, j'écris 4,2124. Pour rendre 432,187 mille fois plus petit, j'écris 0,432187 ; enfin pour rendre 1,21 dix mille fois plus petit, j'écris 0,000121.

34. C'est ici le cas de revenir à nos nouvelles unités : on se souvient que nous avons dit que les mots nouveaux *déci*, *centi*, *milli*, etc. avoient sur les anciens *dixieme*, *centieme*, *millieme*, etc. l'avantage

de la briéveté : mais ne pourroit-on pas demander quelle est l'utilité des mots *déca*, *hecto*, *kilo* et *myria* ? La voici : comme le metre et le gramme sont de petites mesures de longueur et de poids, relativement à des distances et à des poids un peu considérables, comme une lieue, un tonneau de mer, il a paru aux inventeurs des nouvelles unités, qu'il seroit aussi ridicule et aussi peu intelligible de dire, par exemple, ce cheval fait tant de metres par heure, ce tonneau pese tant de grammes, qu'il le seroit de dire; ce cheval fait trente-six mille toises par heure, pour dire qu'il fait trois lieues de 2000 toises par heure; ou ce tonneau pese deux cent cinquante-six mille gros, pour marquer qu'il pese 20 quintaux à 100 livres le quintal. Ils ont donc dû naturellement chercher à remplacer les anciennes unités de cette espece, par de nouvelles unités analogues ; et c'est pour cela qu'ils ont inventé les mots ci-dessus.

Mais comment exprimer en myriagrammes, par exemple, et parties décimales du myriagramme, un nombre exprimé en grammes et décimales de gramme, sans pour cela changer la valeur du nombre primitif ? et réciproquement. Rien de plus simple, et les articles 32 et 33 vont nous servir à résoudre cette double question. En effet, veut-on résoudre la premiere ? il suffira (33) de reculer la virgule de 1, 2, 3, ou 4 rangs vers la gauche, selon que l'on voudra que le nombre donné, au lieu de grammes ou de metres exprime des décagrammes, des hectogrammes, des kilogrammes ou des myriagrammes, ou des décametres, etc. car, d'un côté (33) le changement de la virgule rendra à la vérité le nombre 10, 100, 1000, ou 10000 fois plus petit; mais de l'autre ce nombre exprimera des unités........... 10, 100, 1000, 10000 fois plus grandes. Ainsi, pour

Digitized by Google

changer (1) en myriagrammes le nombre, $18643^{gr},175$ on écrira $1^{myr.,gr}\ 8643175$. Et pour changer en hectometres, $5764^{mt},24$, on écrira $57^{h.,mt}\ 6424$.

35. Pour résoudre le probléme inverse, on voit clairement qu'il suffit de faire agir la virgule (32) dans un sens inverse du précédent. Ainsi, pour faire des grammes de $36^{myr.}$, $^{gr}\ 74175$ on écrira $367417^{gr},5$; et pour changer en metres $9^{myr.}$, $^{mt}25$, on écrira 92500^{m}.

36. Nous allons finir cette théorie, par donner deux regles abrégées qui embrassent à la fois la numération des entiers et celle des décimales. Si l'on considere avec attention un nombre composé d'un égal nombre de chiffres entiers et décimaux tel, que le suivant :

517	545	912	342	153	791	7,	457	892	546	076	409	512
quintillions.	quatrillions.	trillions.	billions.	millions.				millioniemes.	billioniemes.	trillioniemes.	quatrillioniemes.	quintillioniemes.

On verra, que si, à partir du chiffre des unités, on fait de part et d'autre abstraction de quatre chiffres, il faudra trois chiffres pour faire des millions ou des millioniemes, 2 fois trois chiffres pour des billions ou billioniemes, 3 fois, 4 fois, 5 fois trois chiffres pour faire des trillions ou des trillioniemes, des quatrillions, etc., d'où l'on voit que le nombre de fois qu'il faut répéter le nombre 3,

---

(1). Pour abréger, nous écrirons au-dessus des entiers, décag. h.gr. k.gr. myr.g. aulieu de décagramme, hectogramme, kilogramme, myriagramme. Il en sera de même pour le metre, en changeant l'abbréviation gr. en celle de mt.

est correspondant à l'espece d'unités de la tranche (1), cela posé, on entendra facilement les deux regles suivantes, pour résoudre facilement, et même de mémoire, les deux problêmes suivans.

1°. Etant donné le nombre de chiffres, dont est composé un fort grand nombre entier ou décimal, trouver la plus haute ou la plus basse unité de ce nombre. Pour y parvenir, ôtez 4 du nombre donné, et cherchez combien de fois l'excédent contient 3, ce nombre de fois sera le correspondant de l'unité cherchée; si par exemple le nombre de chiffres donné étoit 25, j'ôterois 4, il resteroit 21, qui contient 3 sept fois, qui répond à des septillions ou à des septillioniemes. N'oublions pas que, pour le cas des décimales, le chiffre des unités est compris dans les 25 chiffres décimaux; observez ensuite que, si l'excédent contenoit 3, un certain nombre de fois avec les restes 1 ou 2, il faudroit mettre les mots dix ou cent avant l'espece d'unité trouvée : si l'on avoit, par exemple, 18 chiffres, ôtant 4, il resteroit 14, qui, contenant 3 quatre fois, avec un reste 2, indiqueroit que l'espece d'unité cherchée est des cent-quatrillions ou des cent-quatrillioniemes.

2°. Etant donné la plus haute ou la plus basse unité d'un nombre entier ou décimal, trouver le nombre de ses chiffres. Pour cela, prenez trois fois le nombre correspondant à l'unité donnée; au résultat ajoutez 4 et vous aurez le nombre demandé. Si, par exemple, la plus haute unité d'un nombre entier étoit des quatrillions; je prendrois 3 fois le nombre 4, correspondant aux quatrillions, et au résultat 12 j'ajouterois 4, et j'aurois 16 pour le nombre des chiffres cherchés. Si l'unité donnée étoit précédée des mots dix ou cent, il suffiroit d'ajouter 1 ou 2 au résultat final. Si, par exemple, la plus basse unité d'un nombre décimal étoit des cent-trillioniemes : je prendrois 3 fois le nombre 3, correspondant aux trillioniemes; à 9 j'ajouterois 4; et enfin au total 13, j'ajouterois 2, parce qu'il s'agit de cent-trillioniemes; et j'aurois alors 15, pour le nombre de chiffres cherché, y compris toute fois le chiffre des unités.

---

(1). La premiere syllabe des mots billion, trillion, quatrillion etc. vient des mots latins, *bis*, *ter*, *quoter*, etc., qui veulent dire deux fois, trois fois, quatre fois, etc.

De l'addition des entiers, des décimales et des nouvelles unités.

37. L'ADDITION est une opération par laquelle on réunit plusieurs nombres en un seul, qu'on appelle *somme*. Les nombres qu'on veut ajouter, peuvent être *simples* ; c'est-à-dire, n'avoir qu'un chiffre, ou être *composés*, c'est-à-dire, avoir plusieurs chiffres.

38. Comme l'addition des nombres composés n'est qu'une suite continuelle d'additions de nombres simples, on doit s'habituer à faire beaucoup de ces dernieres. Pour ajouter deux nombres, tels que 8 et 7, il faut ajouter à 8 sept fois de suite l'unité, puisqu'on sait que 7 est la collection de 7 unités (2), et on aura 15, qu'on trouveroit de même, en ajoutant à 7 huit fois de suite l'unité. Si on avoit eu 8, 7 et 9 à ajouter ensemble, après avoir eu 15 pour la somme de 8 et de 7, on auroit eu, ou 9 à ajouter à 15, ou 15 à 9. Alors ajoutant 9 fois de suite l'unité à 15, ou 15 fois de suite l'unité à 9, on eût eu également 24 pour la somme de 8, 7 et 9. Si on eût ajouté d'abord 7 et l'un des deux premiers nombres, et ensuite l'autre et leur somme, on eût trouvé le même résultat : d'où l'on voit qu'on peut ajouter plusieurs nombres dans l'ordre que l'on veut. Passons maintenant à l'addition des nombres composés. Si l'on avoit à ajouter les trois nombres 546, 729, 867, on voit qu'il seroit excessivement long d'ajouter 729 fois de suite l'unité à 546, et ensuite 867 fois de suite l'unité à la somme de ces deux nombres. Aussi est-il une voie bien plus courte ; c'est d'ajouter ensemble les centaines, les dixaines, et les unités simples, et en général les quantités du même ordre. Or on peut faire cette addition en commençant par les plus

hautes ou les plus basses unités. Commençons d'abord par la gauche : 1°. 5 centaines, 7 centaines et 8 centaines, ajoutées dans l'ordre qu'on voudra, font 20 centaines ; 2°. 4 dixaines, 2 dixaines et 6 dixaines, font 12 dixaines, ou 1 centaine et 2 dixaines ; enfin, 3°. 6 unités, 9 unités et 7 unités, font 22 unités, ou 2 dixaines et 2 unités. J'ai donc en tout 20 centaines, plus 1 centaine, deux dixaines, plus 2 dixaines et 2 unités : ajoutant de nouveau 1 et 20 centaines, j'ai 21 centaines, ou 2 mille et 1 centaine ; ajoutant encore 2 et 2 dixaines, j'ai 4 dixaines, ce qui, réunis aux unités, fait en tout 2 mille, 1 centaine, 4 dixaines et 2 unités ou enfin 2142. En commençant par la droite, la somme des unités est 22, ou 2 dixaines et 2 unités ; la somme des dixaines est 12, qui, avec les 2 que nous avons déjà, fait 14 dixaines, ou 1 centaine et 4 dixaines ; enfin la somme des centaines est 20, qui avec 1, fait 21 centaines, ou 2 mille 1 centaine ; on a donc en tout 2142 comme ci-dessus ; mais plus simplement et plus briévement, puisqu'on n'est pas obligé de revenir à chaque instant sur ses pas, et d'avoir à refaire une nouvelle addition.

39. En raisonnant pour tout autre cas, comme pour celui-ci, on verra que pour faire l'addition, il faut généralement écrire les nombres proposés les uns sous les autres, de maniere que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, etc. ; ensuite, ayant tiré une barre sous ces nombres, ajouter ensemble toutes les unités ; si leur somme ne fait pas une dixaine, l'écrire sous les unités ; si elle fait une ou plusieurs dixaines avec des unités, n'écrire que les unités et retenir cette dixaine ou ces dixaines pour les ajouter aux dixaines, pour lesquelles, et les centaines, mille, etc., on opérera de la même maniere, jus-

qu'aux plus hautes unités, dont on écrira la somme telle qu'on l'aura trouvée.

Pour appliquer cette regle à un exemple, soit proposé d'ajouter les quatre nombres 5827, 781, 9564 et 3104. D'abord, en vertu de la regle, je les dispose comme il suit :

	5827
	781
	9564
	3104
Somme.....	19276

Ensuite je dis, en commençant par les unités, 7 et 1 font 8, et 4 font 12, et 4 font 16, qui font 1 dixaine et 6 unités ; j'écris seulement 6 unités, et je retiens la dixaine, pour l'ajouter avec les dixaines ; pour lesquelles je dis : 1 dixaine de retenue et 2 font 3, et 8 font 11, et 6 font 17, et 0 font encore 17 dixaines, ou 1 centaine et 7 dixaines que j'écris sous les dixaines, et je retiens la centaine que j'ajoute avec les centaines, en disant : 1 centaine de retenue et 8 font 9, et 7 font 16, et 5 font 21, et 1 font 22 centaines, ou 2 mille et 2 centaines que j'écris sous les centaines, et enfin ajoutant les 2 mille avec les mille, je dis : 2 et 5 font 7, et 9 font 16, et 3 font 19, que j'écris tel qu'il est, en mettant les 9 mille sous les mille, et la dixaine de mille d'un rang plus éloigné sur la gauche.

Nous ne perdrons pas le temps à multiplier les discours pour une regle aussi facile ; cependant, pour habituer les commençans, en voici plusieurs exemples, sur lesquels ils pourront s'exercer :

40000	4856	900471	37425481
9000	16384	352523	40885245
900	259	4827	84949518
90	18	95125	35515540
10	9	1352946	90000000
4	21526		11224216
50004			300000000

40. Puisque les décimales, par leur nature, sont telles qu'en allant de droite à gauche, dix unités d'un ordre quelconque, ne valent qu'une unité de l'ordre immédiatement supérieur, on voit que la regle de l'addition des décimales ne doit pas différer de celle des entiers. Nous ne ferons qu'une remarque : comme les nombres qu'on doit ajouter, n'ont pas toujours le même nombre de chiffres décimaux, l'on pourroit être embarrassé, pour placer les unes sous les autres, les unités de même espece ; pour éviter tout embarras, on pourroit, au moyen d'un nombre de zéros suffisans, rendre le nombre des chiffres décimaux le même partout ; mais il est plus court de placer les virgules les unes sous les autres ; ce qui suffira pour ranger les chiffres dans l'ordre convenable.

Soit proposé, par exemple, d'ajouter 92,627, 548,9, 2,4729 et 0,1459 ; en plaçant les virgules les unes sous les autres, j'ai à ajouter

	92,627
	548,9
	2,4729
	0,1459
Somme...	644,1458

Alors je dis : 9 dix-milliemes et 9 dix-milliemes, font 18 dix-milliemes, ou 1 millieme, et 8 dix milliemes que j'écris sous les dix-milliemes ; ensuite 1 millieme de retenu et 7 font 8, et 2 font 10, et 5 font 15 milliemes, ou 1 centieme et 5 milliemes ; j'écris ceux-ci sous les milliemes, et retenant 1 centieme, je l'ajoute aux centiemes, en disant : 1 de retenu et 2 font 3, et 7 font 10, et 4 font 14 centiemes, ou 1 dixieme, et 4 centiemes que j'écris, et retenant 1 dixieme, je l'ajoute aux dixiemes, en disant : 1 et 6 font 7, et 9 font 16, et 4 font 20, et 1 font 21 dixiemes, ou 2 unités entieres et 1 dixieme ; j'écris cet 1 sous les dixiemes, et j'ajoute les 2 unités avec les unités ; et comme je n'ai plus que des nombres entiers à ajouter, j'acheve l'opération, comme il a été enseigné ci-dessus, et je trouve pour somme 644,1458.

41 On opéreroit de même s'il s'agissoit des nouvelles unités ; mais il peut se présenter un cas embarrassant : ce seroit celui où il faudroit ajouter des quantités, dont les unités principales seroient dissemblables ; comme si on donnoit à ajouter $9412^{mt.}$,549 ; $5^{myr.mt.}$,47632 ; $169^{dec.mt.}$,57, $6^{k.mt.}$,521 $34^{h.mt.}$ 541476

Je commencerois par réduire ces nombres à une même espece d'unité, au metre, par exemple (32), et je n'aurois plus qu'à ajouter à l'ordinaire,

	$9412^{mt.}$549
	54763, 2
	1695, 7
	6521, 0
	3454, 1476
Somme...	75846, 5966

On auroit pu réduire le tout en myriametres, et alors il eût fallu ajouter les nombres suivans (33):

myr.mt.
0, 9412549
5, 47632
0, 16957
0, 6521
0, 34541476
myr.mt. 7, 58465966

ce qui me donneroit pour somme, 7 myriametres et 58465966 cent-millionimetres; ce qui, en avançant la virgule de 4 rangs vers la droite, donneroit le nombre de metres déjà trouvé.

De la soustraction des entiers, des décimales, et des nouvelles unités.

42. La soustraction est une opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre; le résultat s'appelle *ou reste*, parce que c'est en effet ce qui reste du plus grand, quand on en a ôté le plus petit; *ou excès*, parce que c'est ce dont le plus grand excede le plus petit; *ou différence*, parce que c'est ce dont le plus petit differe du plus grand.

Pour soustraire un nombre simple d'un autre, 5 de 8, par exemple, il faut retrancher 5 fois de suite l'unité de 8, ce qui donne successivement 7, 6, 5, 4 et 3; et ce dernier nombre est le reste cherché: on voit par-là que la soustraction est l'opération inverse de l'addition.

43. Si l'on veut soustraire l'un de l'autre deux nombres composés, par exemple, 547 de 879; on

voit qu'il seroit d'une longueur rebutante de soustraire 547 fois de suite l'unité de 879. Mais ce qui a été dit dans l'addition, doit faire préjuger qu'on a imaginé de même pour la soustraction, de retrancher les unes des autres les unités de même espece, et cela en commençant par les plus petites, ce dont on verra bientôt la raison. Je dis donc : de 9 unités je soustrais 7 unités, et j'ai pour reste 2 unités : ensuite de 7 dixaines, j'ôte 4 dixaines, il reste 3 dixaines; enfin de 8 centaines j'ôte 5 centaines, et j'ai pour reste 3 centaines; il me reste donc en tout 3 centaines, 3 dixaines et 2 unités, ou 332.

44. Dans le cas actuel, et dans tous les autres, où chacune des diverses unités qu'on retranche, est plus petite que celle qui lui répond dans le nombre dont on la retranche, l'opération ne peut souffrir aucune difficulté. Mais il pourroit se faire qu'une ou que plusieurs des premieres fussent plus grandes que leurs correspondantes; par exemple, pour prendre un cas fort simple, qu'on eût 59 à retrancher de 96, où 9 unités sont plus grandes que les 6 unités dont on doit les retrancher. Pour résoudre cette difficulté, on empruntera, par la pensée, une dixaine sur le chiffre 9 des dixaines de 96; ensuite on l'ajoutera aux unités 6; ce qui donnera 10 plus 6 ou 16; alors on pourra retrancher 9 de 16, et on aura pour reste 7 unités; mais ensuite pour tenir compte de la dixaine qu'on a empruntée sur le 9, on ne le comptera que pour 8; et alors ôtant 5 de 8, il restera 3 dixaines; le reste sera donc en tout 37. Il est aisé de voir la raison de cette regle, en observant que 96 valent 80 plus 16, ou 8 dixaines plus 16 unités.

45. Le chiffre sur lequel se doit faire l'emprunt pourroit être un zéro; par exemple, on pourroit avoir 469 à retrancher de 501 : que faire alors, puisque

que ce zéro ne peut rien prêter ? le voici : on empruntera, non sur le zéro, mais sur le chiffre qui le suit à gauche; et comme ce chiffre exprime des centaines, et qu'on ne peut jamais avoir besoin que d'une dixaine, on divisera la centaine qui vaut dix dixaines, en 9 dixaines et 1 dixaine. Ajoutant alors une dixaine ou 10 au chiffre 1 des unités, on aura 11, dont on pourra ôter 9, et il restera 2 unités : ensuite comptant le 0 des dixaines pour 9 dixaines, on en ôtera 6 dixaines; ce qui en donnera 3; enfin ôtant 4 centaines de 4 centaines, et non de 5, puisqu'on en a emprunté une, il restera 0 centaine : le reste total sera donc 32 : on sentira la raison de cette opération, en remarquant que 501 n'est autre chose que 400, plus 90, plus 11, ou 4 centaines, 9 dixaines et 11 unités. Or, les nombres 4, 9 et 11 sont précisément ceux dont on a prescrit de retrancher les nombres correspondans 9, 6 et 4 de 469.

S'il y avoit plusieurs zéros de suite, on se conduiroit d'une maniere analogue : s'il y avoit, par exemple, 50004, dont je voulusse retrancher 24365, je décomposerois 50004 ou 5 dixaines de mille et 4 unités, en 4 dixaines de mille, 9 mille, 9 centaines, 9 dixaines, et 10 unités, plus 4 unités ou 14 unités, ce qui est absolument la même chose que 50004 (1er. exemple du no. 39). Ainsi, j'aurois successivement à retrancher les chiffres 5, 6, 3, 4 et 2 du nombre 24365, des correspondans 14,9,9,9 et 4 du nombre 50004, décomposé comme on vient de le voir; alors opérant comme ci-dessus, j'aurai pour restes partiels 9, 3, 6, 5 et 2, ou 25639.

J'aurois pu soustraire, en commençant par la gauche, et j'aurois dit alors : de 5 dixaines de mille j'en ôte 2, il reste 3 dixaines de mille, dont je retiens une ou dix mille, pour avoir de quoi soustraire 4 mille,

et j'écris les 2 autres; ensuite de 10 mille j'ôte 4 mille, et il me reste 6 mille, dont je n'écris que 5, et je retiens 1 mille ou 10 centaines, dont j'ôte 3 centaines, il m'en reste 7; mais je n'en écris que 6, et de l'autre centaine ou de 10 dixaines, j'ôte 6 dixaines, il me vient pour reste 4 dont je ne pose que 3, et je retiens 1 dixaine ou 10 unités qui, ajoutées aux 4 unités de 50004 font 14 unités, dont je n'ai plus qu'à ôter 5 pour avoir 9 unités de reste; les restes partiels sont donc 2, 5, 6, 3 et 9, ou 25639 comme ci-dessus, mais par une voie plus longue et plus embarrassée.

46. De tout ce qu'on a dit sur les différens cas qu'embrasse la soustraction, on peut conclure cette regle générale;

Ecrivez le plus petit nombre sous le plus grand, unités sous unités, dixaines sous dixaines etc. : tirez dessous une barre, et retranchez, en commençant par la droite, les chiffres inférieurs des correspondans supérieurs ; et à chaque soustraction partielle, écrivez le reste au-dessous : si le chiffre inférieur est plus grand que le supérieur, empruntez par la pensée au chiffre voisin 1 unité, qui en vaut 10 pour le chiffre sur lequel vous opérez ; ajoutez ces 10 unités à ce chiffre, et la soustraction sera possible; ensuite dans la soustraction partielle suivante, pour tenir compte de l'unité empruntée sur ce chiffre, diminuez-le d'une unité : enfin, si ce chiffre voisin et même les suivans à gauche étoient des zéros, vous feriez l'emprunt sur le premier chiffre significatif qui viendroit après; mais dans les soustractions partielles suivantes, vous compteriez ce chiffre pour 1 unité de moins, et les zéros pour des 9.

47. Au lieu de diminuer le chiffre supérieur d'une unité, il revient au même d'augmenter de cette unité

le chiffre inférieur, en laissant l'autre tel qu'il est. Ce procédé étant un peu plus simple que l'autre, nous allons l'employer dans l'exemple suivant, où nous avons eu soin de réunir tous les cas de la soustraction.

EXEMPLE:

de	500030034
ôter	332122597
reste...	167907437

Après avoir écrit le plus grand nombre au-dessus du plus petit, et les avoir séparés par une barre, je dis d'abord : de 4 unités je ne puis en ôter 7; je lui ajoute 10, et j'ai 14, dont j'ôte 7; il me reste 7 que j'écris sous les unités. Puis de 3 je ne puis ôter 10, j'ôte donc 10 de 13, et j'ai pour reste 3 que j'écris au-dessous des dixaines : ensuite de 10 j'ôte 6; il reste 4 que j'écris sous les centaines; puis de 10 j'ôte 3, il reste 7, que je pose sous les mille. Enfin de 3, 10, 10, 10 et 5 ôtant successivement 3, 1, 3, 4 et 4, il reste 0, 9, 7, 6 et 1, que j'écris sous les chiffres correspondans.

Joignons ici plusieurs exemples de soustractions, pour exercer les commençans.

EXEMPLE:

de	1000000
ôter	874219
reste...	125781

de	349912
ôter	190023
reste...	159889

de	54040102	de	1000100101
ôter	31251213	ôter	123456789
reste.	22788889	reste..	876643312

48. Il suffira d'un seul exemple, pour faire voir que la regle donnée ci-dessus, pour faire la soustraction des entiers, est la même pour les décimales : seulement pour éviter tout embarras, après avoir placé les deux virgules l'une sous l'autre, (ce qui rangera tous les chiffres dans l'ordre convenable,) on rendra le nombre de chiffres décimaux égal de part et d'autre, en mettant des zéros à la suite de celui des deux nombres qui en a le moins ; soit 78,497 à ôter de 590,04 ;

EXEMPLE:

de	590,040
ôter	78,497
reste...	511,543

J'écris d'abord 78,497 sous 590,04 ; et comme celui-ci n'a que deux chiffres décimaux, tandis que l'autre en a trois, je lui ajoute un zéro, ce qui ne peut en changer la valeur ; puis, ayant tiré une barre sous ces deux nombres, je dis : de o millieme je ne puis ôter 7 milliemes ; j'emprunte donc sur le 4 une unité qui vaut un centieme, ou 10 milliemes ; j'ajoute ces 10 milliemes au chiffre o des milliemes, ce qui fait encore 10 milliemes, dont j'ôte 7 milliemes, il me reste 3 milliemes que je place au dessous ; ensuite il faudroit de 3 centiemes qui restent, à cause de l'unité empruntée, ôter

9 centiemes ; cela ne peut se faire ; je ne puis non plus emprunter sur les chiffres des dixiemes et des unités, qui sont tous deux des zéros : j'emprunte donc des dixaines une unité, qui en vaut mille, relativement aux centiemes pour lesquels j'emprunte ; car, une unité valant 100 centiemes, il est clair que dix unités en valent mille : de ces mille centiemes, j'en laisse 900 sur les unités, et 90 sur les dixiemes, ou plutôt je regarde les zéros comme des 9, ce qui revient au même, puisque 9 unités valent 900 centiemes, et que 9 dixiemes valent 90 centiemes ; enfin je joins les 10 centiemes restans aux 3 pour lesquels j'ai emprunté, et alors de 13 centiemes je puis en ôter 9 ; il m'en reste 4 que je porte dessous ; puis de 9 dixiemes j'en ôte 4, ce qui me donne pour reste 5 dixiemes, que je place au dessous ; alors ayant mis une virgule à gauche, de 9 unités j'en ôte 8, il m'en reste 1 que je mets sous le 8 ; ensuite de 8 dixaines et non de 9, à cause de la dixaine empruntée, j'en ôte 7 ; il m'en reste 1, que je mets sous le 7 ; enfin de 5 centaines j'ôte 0 centaine ; il m'en reste 5 que j'écris au-dessous : le reste total, formé des 6 restes partiels, est donc 511,543.

Dans la pratique, on eût dit plus brievement (47) de 10 j'ôte 7 il reste 3 ; de 14 j'ôte 10 il reste 4 ; de 10 j'ôte 5 il reste 5 ; de 10 j'ôte 9 il reste 1 ; de 9 j'ôte 8 il reste 1 ; enfin de 5 j'ôte 0 il reste 5 ; écrivant donc, à chaque fois, ces 6 restes partiels au-dessous des chiffres sur lesquels on opere, on trouve le même reste total que ci-dessus.

49. Comme la soustraction est absolument la même pour les nouvelles unités, nous nous contenterons de donner quelques exemples pour exercer les éleves :

EXEMPLES:

	mt.		kmt.
de	54,5004	de	3,40003
ôter	39,0409	ôter	0,90498
	mt.		kmt.
reste..	15,4595	reste..	2,49505
	gr.		gr.
de	1	ou de	1,00000
ôter	0,48927	ôter	0,48927
			gr.
		reste...	0,51073
	myr.gr.		myr.gr.
de	5,421795	ou de	5,421795
ôter	0,4	ôter	0,400000
			myr.gr.
		reste...	5,021795

et nous nous bornerons à citer le seul cas, où il s'agiroit de soustraire des unités différentes. Soit donc 54,gr.816 à soustraire de 0,myr.gr.049; on les écrira, (32 et 33) comme il suit :

	gr.		myr.gr.
	490,000	ou	0,0490000
	54,816		0,0054816
	gr.		myr.gr.
reste..	435,184	reste..	0,0435184

et, opérant comme on l'a vu pour les décimales, on aura les deux restes ci dessus, dont le premier exprime des grammes, et le second des myriagrammes, et qui se changent l'un dans l'autre, en reculant, dans le premier, la virgule de quatre rangs vers la gauche, ou en l'avançant, dans le second, de quatre rangs vers la droite.

50. Si l'on avoit plusieurs nombres à retrancher de plusieurs autres, il sembleroit, d'après tout ce qu'on a dit dans ce chapitre et le précédent, qu'on seroit obligé de faire deux additions et une soustraction : cependant il est possible de simplifier ces opérations, et cela, par le secours des *complémens arithmétiques*. On entend ordinairement par ces deux mots *complément arithmétique*, le reste d'un nombre soustrait de l'unité, suivie d'autant de zéros qu'il a de chiffres. Voyez le premier exemple de l'article 47, et le troisieme de l'article 49. En observant de près les deux opérations qu'on a faites, on verra facilement, 1°. que le complément arithmétique d'un nombre s'obtient tout de suite, en prenant la différence entre 9 et tous ses chiffres, hors le dernier à droite qu'on retranche de 10; 2°. que l'opération peut se faire également, en commençant par la droite ou par la gauche; 3°. qu'elle a aussi bien lieu, et de la même maniere, pour les décimales que pour les entiers. Cela posé, supposons que l'on ait à retrancher des six nombres suivans :

48792		42592
54816		36742
36245	les six nombres,	31525
52949		50876
36117		33419
42992		40827
271911		235981
235981		
reste...35930.		

Au lieu d'ajouter d'abord les six premiers nombres, pour avoir la somme 271911, d'ajouter ensuite les

six derniers pour avoir la seconde somme 235981, et enfin d'ôter cette derniere somme de la premiere, pour avoir le reste 35930; il eût été plus court de prendre les six complémens arithmétiques des six derniers nombres qui sont 57408, 63258, 68475, 49124, 66581 et 59173; d'écrire ensuite ces six complémens sous les six premiers nombres, d'ajouter alors ces douze nombres, et enfin d'ôter 6 unités au premier chiffre du résultat : voici l'opération figurée :

	48792
	54816
	36245
	52949
	36117
	42992
complémens arithmétiques	57408
	63258
	68475
	49124
	66581
	59173
somme..........	~~6~~35930

où l'on voit que, l'addition faite, il faut seulement supprimer 6 unités du premier chiffre de la somme, pour avoir le reste demandé. Mais quelle est la raison de ces diverses opérations ? La voici : ne prenons d'abord, pour plus de simplicité, que le premier 42592 des six nombres à retrancher ; si au lieu de retrancher immédiatement ce nombre des six autres, on ajoute son complément arithmétique, on aura par-là ajouté 100000, mais diminué de ce nombre ; on aura donc opéré en effet la soustraction demandée ; mais on aura ajouté 1 centaine

de mille, c'est-à-dire, 1 unité de la plus haute espece du résultat. En raisonnant de même pour le second nombre à retrancher, ou 36742, on conclura qu'on a en effet retranché ce nombre ; mais en portant encore 1 unité de trop au premier chiffre du résultat, et ainsi de suite ; d'où l'on voit qu'en général on doit retrancher, du premier chiffre de la somme totale, autant d'unités qu'on avoit de nombres à soustraire.

51. Il pourroit se faire que les nombres proposés n'eussent pas le même nombre de chiffres ; alors pour éviter toute confusion, il faudroit soustraire chacun des nombres à retrancher de l'unité, suivie d'autant de zéros qu'il y auroit de chiffres dans celui de tous les nombres, soit dont on veut retrancher, soit qu'on veut soustraire, qui se trouveroit en avoir le plus. Nous donnerons donc dorénavant une plus grande latitude aux mots *complément arithmétique*, et nous entendrons généralement par-là le reste d'un nombre soustrait de l'unité, suivie d'autant de zéros *au moins* qu'il a de chiffres. Donnons maintenant un exemple du cas que nous considérons, et prenons-le dans les nombres décimaux.

EXEMPLE.

	354,9876		21,3427
	99,4287		0,6456
	9,5047		1,3292
De	0,0997	ôter	86,9242
	64,5876		176,0046
	946,3224		92,1418
	1474,9307		378,3881
	378,3881		
Reste	1096,5426		

Supposons que, pour trouver le résultat 1096,5426, je veuille me servir des complémens arithmétiques : alors j'observe que la plus haute espece d'unités dans ces deux suites de nombres, est des centaines, et que le nombre des chiffres décimaux ne s'éleve qu'à quatre; ce qui fait en tout 7 chiffres pour celui de tous ces nombres qui en a le plus; j'ôte donc chaque nombre de la seconde suite, de l'unité suivie de 7 zéros ; ou du nombre 1000,0000 ; j'ajoute ensuite les six complémens, calculés sur cette hypothese, avec les six nombres de la premiere suite, et je trouve pour somme 7096,5426 ; alors je n'ai plus qu'à ôter 6 unités de son premier chiffre 7, c'est-à-dire, autant qu'il y a de complémens, pour trouver la somme 1096,5426 que m'avoit donnée la méthode ordinaire. Voici le calcul :

	354,9876
	99,4287
	9,5047
	0,0997
	64,5876
	946,3224
Complémens arithmétiques.	978,6573
	999,3544
	998,6708
	913,0758
	823,9954
	907,8582
	7096,5426

Preuves de l'Addition et de la Soustraction.

52. On entend par *preuve* d'une opération, une opération nouvelle que l'on fait pour s'assurer si la premiere est exacte.

L'addition se prouve par la soustraction, et réciproquement ; et l'on verra dans la suite, qu'en général les regles se prouvent par la regle contraire.

Voici la regle générale qu'on doit suivre pour se prouver la justesse d'une somme qu'on a trouvée : on recommencera, mais par la gauche, à ajouter les diverses unités qu'on avoit déjà ajoutées, et on retranchera chaque somme partielle, de la partie qui lui correspond dans la somme totale ; on continuera ainsi jusqu'aux unités simples, dont la somme doit être telle, qu'en la retranchant de la partie correspondante de la somme totale, il ne reste rien.

Un exemple suffira pour éclaircir cette regle : reprenons la premiere addition de l'article 50, et cherchons à en vérifier la somme. On a trouvé que la somme des six nombres

	48792
	54816
	36245
	52949
	36117
	42992
étoit............	271911
	33330

Pour la vérifier, j'ajoute de nouveau, mais en commençant par la gauche ; je trouve que la somme de la premiere colonne, qui n'est que des dixaines de mille, est 24 ; je les ôte de la partie correspondante 27, qui exprime aussi des dixaines de mille : j'ai pour reste 3 dixaines de mille, que je joins au chiffre suivant, qui vaut 1 mille ; ce qui fait 31

mille, dont j'ôte 28 mille, qui est la somme de la seconde colonne à gauche ; j'ai pour second reste 3 mille, que je joins au chiffre voisin 9, qui exprime des centaines, et j'ai 39 centaines, dont j'ôte 36 centaines, somme des centaines ; j'ai encore pour troisieme reste 3 centaines, qui, jointes à la dixaine 1, font 31 dixaines ; dont j'ôte la somme 28 de la colonne des dixaines ; il reste encore 3 dixaines qui, avec 1 unité, font 31 unités, dont j'ôte enfin la somme 31 de la colonne des unités, et il me reste zéro : d'où je conclus que l'addition a été bien faite, conclusion d'ailleurs évidente d'elle-même ; car, puisque je n'ai fait que retrancher successivement les dixaines de mille, les mille, les centaines, les dixaines et les unités, dont j'avois composé la somme, il ne peut à la fin rester que zéro.

53. Nous n'insisterons pas sur l'application de cette preuve à l'addition des décimales ; il suffira pour les commençans de jetter les yeux sur l'exemple suivant (51), pour comprendre ce qu'ils doivent faire dans tous les cas semblables.

	354,9876
	99,4287
	9,5047
	0,0997
	64,5876
	946,3224
Somme......	1474 9307
	232,3430

ils trouveront pour restes successifs 2, 3, 2, 3, 4, 3 ; et pour dernier reste zéro ; ce qui marque que la somme est exacte.

54. Nous avons dit que la preuve de la soustraction se fait par l'addition : rien en effet n'est plus naturel ; car le reste n'étant autre chose que ce dont le plus grand des deux nombres surpasse le plus petit, il s'en suit évidemment que, si on ajoute le reste au plus petit nombre, on doit retrouver le plus grand. Ainsi faut-il vérifier le reste du premier exemple de l'article 47, j'ajoute le reste 167907437
avec le plus petit nombre........... 332122597

et je retrouve le plus grand........ 500030034

Il en seroit de même pour les décimales. Ainsi ajoutant (1er exemp. 48) le reste...... 511,543
avec le plus petit nombre............. 78,497

je retrouve le plus grand nombre...... 590,040

De la multiplication des Nombres entiers.

55. Dans tous les exemples d'addition que nous avons donnés, nous n'avons eu à ajouter que des nombres différens ; mais on sent bien qu'on pourroit aussi avoir à ajouter des nombres égaux. Si on avoit, par exemple, 56 à ajouter une fois, deux fois, trois fois, etc. à lui-même ; en opérant à l'ordinaire, on trouveroit successivement les sommes suivantes :

56	56	56	
56	56	56	etc.
112	56	56	
	168	56	
		224	

où l'on voit clairement que chaque somme est,

successivement aussi, deux fois, trois fois, quatre fois plus grande que le nombre donné 56, ou plus briévement, est le *double*, le *triple*, le *quadruple* de ce nombre. Nous dirons donc dorénavant *doubler*, *tripler*, *quadrupler* un nombre, au lieu de dire le répéter deux fois, ou trois fois, ou quatre fois.

On sent bien que, s'il falloit répéter un nombre entier un grand nombre de fois, par le moyen qu'on vient d'employer, l'opération deviendroit excessivement longue; mais il est, pour ce cas, une regle fort abrégée, qu'on appelle *Multiplication.*

56. La multiplication est donc une addition abrégée, par laquelle on répete un nombre un certain nombre de fois. Le nombre qu'on répete, se nomme *multiplicande*; celui qui indique combien de fois on doit le répéter, s'appelle *multiplicateur;* et le résultat de l'opération, s'appelle *produit.* Le multiplicande et le multiplicateur, s'appellent aussi, d'un nom commun, les *facteurs* du produit.

57. Comme le produit des nombres les plus compliqués, n'est qu'une suite continuelle de produits partiels des nombres simples, il est essentiel de se familiariser avec ces sortes de produits; c'est pourquoi nous joignons ici la table suivante:

Digitized by Google

Table de Multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Cette table est divisée en deux parties : la premiere qui est renfermée entre deux lignes, est ce qu'on appelle la table de Pythagore ; elle comprend les produits des nombres simples, et est d'une nécessité indispensable. L'autre partie forme, avec la premiere, les produits des nombres jusqu'à 12 fois 12 : sans être d'une nécessité aussi absolue, elle est cependant d'une très-grande utilité, pour abréger les calculs, comme on le verra par la suite, surtout à l'article des nombres complexes, parce que ces nombres se subdivisant la plupart en 12 parties, il est essentiel, pour la brieveté, de les y réduire, au moyen d'un seul produit. Voyons à présent sur quels principes repose la formation de la table ci-dessus.

La premiere ligne, soit horizontale, soit verticale, se forme, en ajoutant continuellement 1 à lui-même, jusqu'à 12 fois 1 ou 12. La seconde,

prise également des deux manieres, se forme en ajoutant 2 continuellement à lui même, jusqu'à 24, produit de 2 par 12; la troisieme, en ajoutant 3 successivement à lui-même, jusqu'à 12 fois 3 ou 36; la quatrieme, la cinquieme..... la douzieme ligne se forment de même, en ajoutant sans cesse 4, 5..... 12 à eux-mêmes, jusqu'à 12 fois 4 ou 48, 12 fois 5 ou 60, ... 12 fois 12 ou 144. On voit, par la composition de cette table, que plusieurs des produits qu'elle renferme peuvent se trouver répétés plusieurs fois, comme 24, par exemple, qui s'y trouve répété six fois (1).

Pour trouver, au moyen de cette table, le produit de deux nombres, de 8 par 6, par exemple, on cherchera le nombre 8 dans la premiere ligne horizontale, en descendant verticalement, jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis le nombre 6, pris dans la premiere ligne verticale, on s'arrêtera sur le nombre 48, qui est bien le produit cherché, puisqu'Il équivaut au nombre 8 ajouté 6 fois à lui-même. Si l'on eût cherché 6 dans la premiere ligne horizontale, et que, descendant verticalement, on se fût arrêté vis-à-vis de 8, on auroit encore trouvé 48. Soit encore demandé le produit de 11 par 9. Je puis chercher 11 ou 9 dans la premiere ligne horizontale, et descendre verticalement, jusqu'à ce que je sois vis-à-vis de 9 ou de 11, pris dans la premiere

(1). Ce qui n'est pas étonnant, puisque 24 étant le produit, ou de 2 par 12, ou de 3 par 8, ou de 4 par 6, doit se trouver dans les cases où 2 est répété 12 fois, et où 12 est rèpété 2 fois; où 3 est répété 8 fois, et où 8 est répété 3 fois; enfin où 4 est répété 6 fois, et où 6 est répété 4 fois; ce qui fait évidemment six combinaisons différentes.

colonne

colonne verticale; et dans les deux, je trouverai également 99 pour le produit cherché.

58. En considérant de près la table, on voit d'abord, et nous le savions déjà, que pour multiplier un nombre par 10, il suffit d'ajouter un zéro à la suite de ce nombre; ainsi 10 fois 7, 10 fois 12 font 70 et 120; et ensuite ce qu'on vient de dire, démontre aux yeux, que le produit de deux nombres de cette table est le même, dans quelqu'ordre qu'on les multiplie. Mais si l'on en veut une démonstration plus rigoureuse, la voici: Soient pris les deux premiers nombres ci-dessus 8 et 6; si l'on veut multiplier 8 par 6, on voit (56) qu'il faut répéter 8 six fois, ou 6 fois la collection de 8 unités. Isolons donc ces 8 unités, et les écrivant à part sur une même ligne horizontale, il ne s'agira plus, pour avoir le produit cherché, que de répéter 6 fois cette ligne, et d'ajouter ensuite toutes ces unités, disposées dans l'ordre ci-dessous.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,

Or la somme fait évidemment 48 unités; il est clair, de plus, que l'on peut donner à ces unités la disposition suivante, où l'on a répété 8 fois la collection de 6 unités prises séparément, ce qui revient à multiplier 6 par 8;

1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1, 1,

or, sous cet aspect, la somme est encore de 48 unités. La démonstration, à la longueur près, seroit encore la même, si l'un des deux facteurs, ou tous les deux étoient des nombres composés, c'est-à-dire, que si on avoit, par exemple, 32 et 154 à multiplier l'un par l'autre, on auroit la même somme, en écrivant 32 lignes horizontales de 154 unités chacune, ou 154 lignes horizontales de 32 unités chacune; l'on voit donc qu'en général le produit de deux nombres quelconques ne varie pas, dans quelqu'ordre qu'on multiplie ses facteurs; ce qui seroit encore vrai, quand même l'un des deux nombres seroit concret. Si, par exemple, on vouloit savoir ce que font 12 fois 5 francs, on trouveroit également 60 francs pour produit, soit qu'on prît 12 fois 5 francs, ou 5 fois 12 francs.

59. Si on demandoit le produit de plusieurs nombres; de 2, 3, et 4, par exemple, après avoir eu 6 pour le produit de 2 par 3 ou de 3 par 2, on auroit 24 pour le produit, ou de 6 par 4, ou de 4 par 6: on auroit encore 24 dans quelqu'autre ordre qu'on multipliât; en multipliant, par exemple, d'abord 3 par 4, ou 4 par 3, ce qui donneroit 12, et ensuite 12 par 2, ou 2 par 12, ce qui

produit également 24; il en seroit de même pour un plus grand nombre de facteurs. Il est donc démontré que le produit de tant de facteurs qu'on voudra, ne change pas, dans quelqu'ordre qu'on les multiplie. Outre que ce principe nous sera utile par la suite, nous allons sur-le-champ nous en servir, pour prouver les différens procédés de la multiplication que nous allons enseigner, après quelques courtes réflexions sur la nature des facteurs et du produit.

60. Il est bien rare que, dans une multiplication, les deux facteurs soient des nombres abstraits; presque toujours l'un des deux, ou tous les deux sont des nombres concrets. Combien valent 2 fois 6 francs? est un exemple du premier cas: combien valent 2 metres ou 2 aunes à 6 francs le metre ou l'aune? est un exemple du second: de plus, on voit que la réponse sera également 12 francs, soit que le multiplicateur 2 soit abstrait ou concret. D'ailleurs, le produit n'est autre chose que l'addition répétée du multiplicande. L'on pourra donc conclure de tout ceci: 1°. qu'on doit toujours regarder le multiplicateur comme abstrait; 2°. que le produit doit toujours être de même espece que le multiplicande. Reste donc à savoir lequel des deux facteurs on doit poser pour multiplicande, ou pour multiplicateur; et c'est là ce que l'état de la question peut seul décider: car, il est très-possible qu'avec des facteurs, égaux de toute maniere, on ait néanmoins des produits d'especes différentes: si l'on proposoit, par exemple, cette question: combien valent 6 metres à 2 francs le metre? la réponse seroit 12 francs; mais si l'on demandoit combien, à un franc les 6 metres, on aura de metres pour 2 francs, il est évident que la réponse seroit 12 metres.

Pour habituer les commençans à résoudre ces différens cas, nous appliquerons la plupart des exemples de multiplication à des nombres concrets : avec d'autant plus de raison, que la multiplication a le plus souvent pour but, de connoître la valeur de plusieurs unités concretes, lorsqu'on connoît la valeur d'une seule.

61. Voyons d'abord comment se fait la multiplication d'un nombre composé par un nombre simple, et pour cela, cherchons à savoir combien font 6 fois 24 francs. On peut considérer 24 francs comme 2 francs et 2 dixaines de franc, et il est clair que pour prendre 6 fois le nombre total, on peut prendre 6 fois toutes les parties dont il est composé. D'ailleurs le produit doit être des francs ; posons donc pour multiplicande, celui des deux nombres qui est de la même espece, dont doit être ce produit, et nous aurons :

$$\begin{array}{lr} & 24^{f.} \\ & 6 \\ \hline \text{produit....} & 144^{f.} \end{array}$$

puis nous dirons, en commençant par la droite, 6 fois 4 unités font 24 unités, ou 2 dixaines et 4 unités ; je pose les 4 unités sous les 6 unités, et je retiens les 2 dixaines : ensuite je prends encore 6 fois les 2 dixaines de 24, ce qui me donne 12 dixaines, ou 1 centaine et 2 dixaines, qui, avec les 2 dixaines retenues, font 4 dixaines. Je pose les 4 dixaines sous les dixaines 2 du multiplicateur, et la centaine à gauche des 4 dixaines. Le produit de 24 par 6, est donc $144^{f.}$ Si j'eusse commencé à multiplier par la gauche, j'aurois dit : 6 fois 2 dixaines font 12 dixaines, ou 1 centaine et 2

dixaines ; ensuite 6 fois 4 unités font 24 unités, ou 2 dixaines et 4 unités : j'ai donc en tout 1 centaine et 2 dixaines, 2 dixaines et 4 unités : ajoutant ensemble les dixaines, j'ai enfin 1 centaine, 4 dixaines et 4 unités, ou 144, comme ci dessus, mais avec une addition de plus à faire. Plus il y auroit de chiffres à multiplier, plus encore cette seconde maniere deviendroit pénible, à peu-près comme dans l'addition ; et c'est ce qu'on conçoit sans peine, si l'on se rappelle que nous avons dit que la multiplication n'étoit qu'une addition abrégée.

Indépendamment de cette seconde opération, on auroit pu aisément, au moyen de l'extension donnée à la table ci-dessus, prouver la légitimité de 144, produit de 24 par 6 ; car on a vu que 24 étoit le produit de 2 par 12 ; donc au produit de 24 par 6, on peut substituer celui de 2 fois 12 par 6, ou de 2 fois 6 par 12 (59), ce qui donne d'abord 12, et ensuite 144.

Le procédé seroit toujours semblable, si le multiplicande avoit plus de deux chiffres. Ainsi, nous ne donnerons plus qu'un exemple, qui, avec le précédent, suffira pour déduire la regle générale qu'il faut suivre dans ce premier cas de la multiplication. Supposons donc qu'on demande ce que font 394267 fois 8 francs.

Comme (58) 394267 fois 8 francs, est la même chose que 8 fois 394267 francs, je pose, comme il suit, 8 sous 394267 ; je tire une barre sous le 8, et je dis :

394267f.
8

produit..... 3154136f.

8 fois 7 unités font 56 unités, ou 5 dixaines et 6

unités; je pose les 6 unités sous les unités des facteurs, et je retiens les 5 dixaines : ensuite 8 fois 6 dixaines font 48 dixaines, et 5 retenues font 53 dixaines, ou 5 centaines que je retiens, et 3 dixaines que je pose sous les dixaines du multiplicande; puis 8 fois 2 centaines font 16 centaines, qui, jointes aux 5 centaines retenues, font 21 centaines, ou 2 mille et 1 centaine, que je pose sous les centaines du multiplicande : et retenant les 2 mille, je les ajoute au produit 32 des 4 mille du multiplicande par 8. J'ai 34 mille, dont je n'écris que les 4 mille, et je retiens 3 dixaines de mille, pour les réunir au produit 72 des 9 dixaines de mille par 8; j'ai 75, dont je n'écris que le 5, et je retiens 7 centaines de mille, qui, jointes au produit 24 des 3 centaines de mille du multiplicande par 8, font 31, que j'écris, tel qu'il est, en plaçant la centaine de mille sous celles du multiplicande, et les 3 millions à la gauche de ce même 1. Le produit total est donc 3154136f.

62. Voici donc la regle générale, pour multiplier un nombre composé d'autant de chiffres qu'on voudra, par un nombre d'un seul chiffre.

Ecrivez ce chiffre sous les unités du multiplicande, tirez ensuite une ligne sous ce chiffre, pour le séparer du produit; ensuite multipliez successivement, en commençant par la droite, tous les chiffres du multiplicande par le chiffre donné. Toutes les fois qu'un produit partiel n'aura qu'un chiffre, posez-le sous le chiffre correspondant du multiplicande; mais, s'il en a deux, n'écrivez alors que celui des unités, et retenez l'autre, pour le joindre au produit suivant : enfin, au dernier produit partiel, écrivez-le tel que vous l'aurez trouvé.

63. Quoique 11 et 12 ne soient pas des nombres simples, cependant rien n'empêche de leur appli-

quer la regle donnée pour ceux-ci ; c'est à dire qu'on multipliera successivement par 11 ou 12 les unités, dixaines, centaines, etc. du multiplicande, comme on l'a enseigné pour les nombres simples : quant au reste de l'opération, il est absolument le même. Ainsi, si l'on demandoit combien font 11 fois 348f., je dirois (au moyen du supplément de la table de Pythagore), 11 fois 8 unités font 88 unités, ou 8 dixaines et 8 unités ; je pose donc les 8 unités sous les unités des facteurs, et je retiens les 8 dixaines ; ensuite 11 fois 4 dixaines font 44 dixaines, et 8 font 52, ou 5 centaines et 2 dixaines que je pose ; enfin ajoutant les 5 centaines aux 33 du produit des 3 centaines par 11, j'ai 38 centaines, que j'écris, telles que je les trouve ; le produit total est donc 3828f. On peut aisément prouver la légitimité de ce produit, et de tous les autres semblables ; car, 11 valant 10 et 1, il est clair que je dois avoir le même produit, en multipliant 348 d'abord par 10, ensuite par 1, et enfin en ajoutant ces deux produits. Or (58.),

10 fois 348 font.....3480
et 1 fois 348 fait...... 348

produit.....3828 comme ci-dessus.

Il en seroit de même pour 12 ; seulement, au lieu d'ajouter 1 fois le nombre à son décuple, on l'ajouteroit 2 fois.

Joignons quelques exemples, mais, pour abréger, appliquons-les à des nombres abstraits.

	54000		75048
	7		8
produit....	378000	produit....	600384

3999999	548165697
11	12
produit.... 43999989	produit.... 6577988364

On voit que le premier produit doit avoir trois zéros, comme le multiplicande; puisque, d'un côté, d'après la regle, on doit multiplier successivement chacun d'eux par 7, et que, de l'autre, le produit de o par un nombre quelconque, ne peut être que zéro : d'où l'on voit que cela revient à multiplier 54 d'abord par 7, et à mettre 3 zéros à la suite du produit, c'est-à-dire, autant qu'il y en avoit dans le multiplicande.

64. Passons maintenant à la multiplication de deux nombres composés l'un par l'autre. Supposons donc d'abord qu'on demande combien on aura de grammes pour 72 francs, à raison de 123 grammes pour 1 franc. D'abord l'état de la question indique que le produit doit être des grammes, et que je les aurois en prenant 72 fois 123 grammes. Je place donc, comme on le voit ci-dessous, le multiplicateur 72, regardé comme un nombre abstrait (60), sous le multiplicande 423 grammes. Je tire ensuite une barre sous le multiplicateur, pour le séparer du produit,

423gr.
72
846
29610
produit.... 30456gr.

et je dis : le multiplicateur 72 étant composé de 7 dixaines et de 2 unités, il faut donc prendre le multiplicande d'abord 2 fois, et ensuite 7 dixaines de fois : d'abord le produit de 423 par 2 est (61) 846 ; ensuite le produit de ce même nombre par 7 est 2961 ; mais ce n'est pas 7 fois seulement qu'il faut répéter le multiplicande, c'est 7 dixaines de fois, ou 7 fois 10 fois ; il faut donc, puisque je ne l'ai pris que 7 fois, le prendre encore 10 fois, ou le multiplier par 10 : il faut donc, à la suite de 2961, ajouter un zéro, et écrire 29610 sous les chiffres correspondans du premier produit, alors il ne reste plus qu'à ajouter les deux produits partiels, pour avoir le produit total demandé, qu'on trouvera être 30456gr..

65. Comme 72 est le produit de 8 par 9 (voyez la table), on auroit pu réduire le produit de 423 par 72, aux deux produits successifs de 423 par 8 et ensuite par 9 : ce qui serviroit à constater la justesse de la regle ci-dessus ; d'ailleurs ce moyen est plus court, en ce qu'il épargne l'addition des produits partiels : on eût trouvé que le produit de 423 par 8 est 3384, et que le produit de 3384 par 9, est 30456. Si l'on avoit, en suivant la premiere maniere, multiplié par la gauche, c'est-à-dire, en commençant par le 7, on eût trouvé ce qui suit :

```
          423gr.
           72
          ———
         29610
           846
         —————
produit.... 30456gr.
```

c'est-à-dire, le même produit total; mais les produits partiels écrits dans un ordre inverse; d'où l'on voit qu'il revient au même de commencer par la droite ou par la gauche du multiplicateur; mais, pour nous conformer à l'usage reçu, nous multiplierons toujours en commençant par la droite.

Si les deux facteurs étoient composés d'un plus grand nombre de chiffres, on se conduiroit d'une maniere analogue. Soit proposé, par exemple, de savoir ce que coûteroit par an, ou en 365 jours, une armée qui coûteroit 25645fr. par jour? on voit qu'il faut répéter 25645fr., 365 fois. Je dispose donc ces nombres comme il suit:

```
          25645f.
            365
        -------
         128225
        1538700
        7693500
        -------
produit.... 9360425f.
```

et je dis: 365 étant composé de 3 centaines, de 6 dixaines et de 5 unités; je prendrai d'abord 5 fois 25645, ce qui me donnera pour premier produit partiel 128225: je prendrai ensuite le même nombre 6 fois, et j'aurai 153870; mais comme ce nombre est 10 fois trop petit, parce que c'est, non par 6, mais par 10 fois 6 que je devois multiplier, j'ajouterai un zéro à la fin de ce second produit partiel, et j'aurai par-là 1538700, que je poserai sous le premier produit; enfin prenant 3 fois 25645, j'aurai pour troisieme produit partiel 76935, auquel j'ajouterai deux zéros, pour le rendre cent fois plus

grand, parce que c'étoit par 100 fois 3, et non par 3, qu'il falloit multiplier le nombre supérieur; écrivant alors ce troisieme produit sous les deux autres, je les ajoute, et je trouve pour produit total 9360425$^{fr.}$: l'entretien de cette armée coûte donc 9360425$^{fr.}$ par an.

66. Si l'on fait attention que, dans les deux exemples ci-dessus, le premier chiffre à droite de chaque produit partiel, est toujours sous le chiffre par lequel on multiplie, on pourra se dispenser de mettre des zéros, et par conséquent écrire ainsi les trois produits partiels ci-dessus :

$$\begin{array}{r} 128225 \\ 153870 \\ 76935 \\ \hline 9360425 \end{array}$$

qui, comme on le voit, donnent le même produit.

Comme on peut prendre pour multiplicande, celui des deux facteurs que l'on veut, en le regardant toutefois, comme de même espece que le produit, c'est-à-dire, ici comme des francs ; on pourroit demander pourquoi, les résultats devant être les mêmes, nous avons choisi pour multiplicande le plus grand des deux nombres : nous répondrons que notre choix provient de ce que le calcul est moins long : en effet, il suffit de jetter les yeux sur l'opération suivante, pour voir la vérité de notre assertion.

```
               365
             25645
             -----
              1825
             1460
            2190
           1825
           730
          -------
produit..... 9360425
```

67. Il pourroit arriver qu'un ou plusieurs des chiffres du multiplicateur fussent des zéros; alors comme la multiplication par ce zéro, ou ces zéros ne donneroit que des zéros, on peut omettre la multiplication; il faudra seulement avoir soin (66) de poser le premier chiffre à droite du produit suivant, sous le chiffre significatif, qui vient après. Voyez l'exemple suivant :

```
                    453214
                    400709
                   --------
                   4078926
                 3172498
               1812856
             ------------
Produit....  181606928726
```

68. Enfin supposons que l'un des facteurs, ou tous les deux soient terminés par des zéros : 1°. Si c'est le multiplicande, on a vu (63. ex. 1.) que l'on pouvoit faire abstraction de ces zéros, pourvu qu'on les mît tous à la suite du produit; 2°. si c'est le multiplicateur, la regle sera la même, puis-

qu'il est permis (58) de prendre les deux facteurs l'un pour l'autre; 3°. enfin, si tous les deux sont terminés par des zéros, on fera d'abord abstraction des zéros du multiplicande, sauf à les mettre à la suite du produit, et dans cet état, il n'y auroit plus qu'à le multiplier par le multiplicateur. Mais alors, si on échange les places des deux facteurs, on pourra encore supprimer les zéros du nouveau multiplicande, pour les placer à la suite du produit; il s'ensuit donc qu'il faut multiplier les deux facteurs, comme s'il n'y avoit pas de zéros; mais, après la multiplication, en placer autant, à la suite du produit, qu'il y en avoit dans les deux facteurs réunis. Voici un exemple de chacun de ces trois cas.

Exemples I.

```
            384000
               564
            ------
              1536
             2304
            1920
            ---------
Produit.....216576|000
```

II.

```
        49245
         3400
        -----
       196980
      147735
      -----------
Prod... 1674330|00
```

III.

```
        4940000
         969000
        -------
        4446
       2964
      4446
      ---------------
Prod. 478686|0000000
```

69. De tout ce qu'on a dit dans les articles précédens, on peut facilement conclure la méthode générale suivante, pour faire la multiplication de deux nombres, composés chacun d'autant de chiffres qu'on voudra.

Ecrivez le plus petit de ces nombres sous le plus grand, et multipliez tout le multiplicande, successivement par les unités, les dixaines, les centaines, etc. du multiplicateur, en ayant soin de placer le premier chiffre à droite de chaque produit partiel, sous le chiffre actuel du multiplicateur; ensuite, ayant trouvé tous ces produits partiels, ajoutez-les; leur somme sera le produit total. S'il se trouvoit des zéros à la suite des facteurs, n'opérez, comme il vient d'être dit, que sur les chiffres significatifs, et mettez à la suite du produit, un nombre de zéros égal à la somme de ceux de ces facteurs.

Nous allons laisser quelques exemples de plus qu'à l'ordinaire, parce qu'ils vont nous servir dans les articles suivans :

EXEMPLES

I.		II.	
	524000		47896
	2500		999
	2620		431064
	1048		431064
			431064
prod.	13100|00000	prod.	47848104

III.

```
         5964
         5964
      -------
        23856
       35784
      53676
     29820
    ---------
prod.. 35569296
```

IV.

```
          494857
            3125
      ----------
         2474285
         989714
        494857
       1484571
      ----------
prod. 1546428125
```

V.

```
               54918
               99988
           ---------
              439344
             439344
            494262
           494262
          494262
         -----------
produit..... 5491140984
```

VI.

```
                34562494
                12366459
              ----------
               311062446
              172812470
             138249976
            207374964
           207374964
          103687482
         69124988
        34562494
       ---------------
produit.... 427415664988746
```

Digitized by Google

Méthodes abrégées pour la multiplication.

70. On a vu (note sur l'article 57.) que 24 étoit le produit des facteurs 2 et 12, ou 3 et 8, ou 4 et 6. On dit aussi alors que 24 est *multiple* de 2, de 12, de 3, de 8, de 4 et de 6; et réciproquement que 2, 12, 3, 8, 4 et 6 sont *sous-multiples* de 24. Ces derniers s'appellent aussi *parties aliquotes* du même nombre 24. Au moyen de la table ci-dessus, on peut trouver deux sous-multiples d'un nombre donné, quand toutefois il en a; il faut, pour cela, chercher ce nombre dans les cases, et quand on l'aura trouvé, regarder quels sont les deux nombres qui lui correspondent dans la premiere ligne, soit verticale, soit horizontale. Ainsi, si l'on veut connoître deux sous-multiples de 63, on le cherchera dans la table, et l'on trouvera qu'il répond à 7 et 9; ce sont donc deux des sous-multiples cherchés. Cela posé,

I. Si l'un des deux facteurs d'une multiplication est multiple de deux autres, il sera plus court de multiplier successivement l'autre facteur par ces deux derniers nombres. Ainsi (ex. 1.), où 25 est le produit de 5 par 5, je multiplie 524 deux fois de suite par 5:

```
             524
               5
            ----
            2620
               5
            ----
produit.... 13100|0000
```

et je trouve 13100, comme on l'avoit déjà trouvé; alors

alors je n'ai plus qu'à mettre à la suite du produit les cinq zéros prescrits par la regle. On voit que cette opération est plus courte que l'autre, puisqu'elle épargne une addition.

71. II. On pourroit faire cette multiplication encore plus briévement. En effet, 100 étant le produit de 25 par 4, si je multiplie 524 par 100, c'est-à-dire, si j'écris 52400, je n'aurai plus qu'à prendre le quart de ce nombre, puisque j'ai multiplié par un nombre 4 fois trop grand; or, le quart de 52400 est 13100, comme ci-dessus.

En général, 5, 5 fois 5 ou 25, 5 fois 25 ou 125, 5 fois 125 ou 625, 5 fois 625 ou 3125, etc., sont la moitié de 10, le quart de 100, le huitieme de 1000, le seizieme de 10000, le trente-deuxieme de 100000, etc., et cela est aisé à voir. En effet, 5 est d'abord évidemment la moitié de 10 : 25, produit de 5 par 5, est aussi le produit de la moitié de 10 par la moitié de 10, ou le quart de 100; 125 est le produit de 5 par 25, ou celui de la moitié de 10 par le quart de 100, ou enfin le huitieme de 1000, etc., ainsi, lorsque j'aurai à multiplier par 3125, par exemple, il sera bien plus court de mettre 5 zéros à la suite du multiplicande, et prendre le trente-deuxieme du tout, ce qu'on pourra faire en en prenant successivement le huitieme et le quart. On pourroit donc plus briévement trouver de cette maniere, le produit de l'exemple IV, où il s'agit de multiplier par 3125 le nombre 494857, en écrivant d'abord 49485700000, puis prenant le huitieme de ce nombre, qui est 6185712500, et enfin le quart de ce dernier nombre, qu'on trouvera être 1546428125, comme on l'avoit trouvé.

72. III. Si l'on avoit à multiplier, comme dans l'exemple II par un nombre formé de plusieurs 9, il seroit bien plus court d'ajouter, à la suite du multiplicande, autant de zéros qu'il y auroit de 9, et de retrancher de ce dernier nombre le multiplicande lui-même, en cette maniere.

au lieu de	47896	je dis.... de	47896000
à multiplier par	999	j'ôte...	47896
		reste.....	47848104

Voici la raison bien simple de cette abréviation : multiplier par 999, c'est multiplier par 1000 moins 1. Si donc je multiplie par 1000, ce que je fais réellement en mettant 3 zéros à la suite de 47896, je prends ce nombre 1 fois de trop; il faut donc le retrancher de son produit par 1000.

73. IV. Si le multiplicateur n'avoit que son dernier, ou que ses deux derniers chiffres qui ne fussent pas des 9; si, par exemple, on avoit (ex. V) 54918 à multiplier par 99988, on n'en mettroit pas moins 5 zéros à la suite de 54918, c'est-à-dire, autant de zéros qu'il y a de chiffres dans 99988; mais alors du nombre 9998800000, l'on retrancheroit le produit de 54918 par 12, en cette maniere :

du produit de 54918 par 100000, ou de 5491800000
j'ôte le produit de 54918 par 12 , ou....... 659016

reste.... 5491140984

la raison de cette opération est que 99988 vaut 100000 moins 12; si je multiplie donc 54918 par 100000, ce que je fais en mettant 5 zéros, je prends ce même nombre 12 fois de trop ; il faut donc retrancher 12 fois 54918 de 100000 fois ce même nombre.

74. V. Pour bien entendre ce qu'on va dire, il faut se rappeler d'abord que nous multiplions par 11 et 12, comme s'ils étoient des nombres simples : et ensuite que, dans ce cas, ou tout autre pareil, le premier chiffre à droite d'un produit partiel par l'un de ces deux nombres, ou par tout autre de deux chiffres, doit être placé sous les unités de ces nombres. Cela posé, si, un chiffre ou deux chiffres, pris de gauche à droite du multi-

plicateur, se trouvoient multiples d'un chiffre par lequel on eût déjà multiplié; si, par exemple, on avoit à multiplier par 6, après avoir multiplié par 3, ou par 72, après avoir multiplié par 9, ou par 88, après avoir multiplié par 11, etc. au lieu de multiplier, dans le premier cas par 6, dans le second par 2, et ensuite par 7; dans le troisieme, deux fois par 8, etc. il seroit bien plus expéditif de prendre ou 2 fois le produit par 3, ou 8 fois le produit par 9, ou 8 fois le produit par 11. Un exemple suffira pour éclaircir ce que nous disons.

Soit pris l'exemple VI donné ci-dessus, où le multiplicateur est 12366459; j'observe que 45 est égal à 5 fois 9, premier chiffre à droite du multiplicateur; ensuite que les deux premiers à gauche, et les deux suivans, ou 12 et 36 sont 2 fois et 6 fois 6, qui est le chiffre qui les suit, et par lequel on est censé avoir déjà multiplié. Ainsi, au lieu de faire sept produits partiels (en comptant celui par 12 pour un), je n'en puis faire que cinq, comme on le voit ici :

	34562494
	12366459
produit par 9..........	311062446
produit du précéd. par 5	1555312230
produit par 6..........	207374964
produit du précéd. par 6	1244249784
produit du même par 2.	414749928
produit total..............	427415664988746

comme dans l'exemple VI.

75. VI. L'on pourroit encore faire ces abréviations, quand même, dans le multiplicateur, les

Digitized by Google

multiples seroient à droite de leurs facteurs : il ne faudroit que commencer d'abord à multiplier par ces derniers, et finir ensuite par les autres ; mais toujours, en ayant soin de placer convenablement le premier chiffre à droite de chaque produit. Voyez l'exemple suivant :

Regle ordinaire.

	493127
	397281
	493127
	3945016
	986254
	3451889
	4438143
	1479381
produit........	195909987687

Regle abrégée.

	493127
	397281
produit par 3...........	1479381
produit du précéd. par 3.	4438143
produit du précéd. par 8.	35505144
produit du même par 9..	39943287
produit total.............	195909987687

Comme il est peu de cas, dans les multiplications un peu composées, où l'on ne puisse faire quelqu'une de ces abréviations, et que la multiplica-

Digitized by Google

tion est alors assez longue, pour qu'il soit utile de l'abréger, nous joindrons içi les exemples suivans :

	81239
	63742
pour 7.......	568673
pour 42.......	3412038
pour 63.......	5118057
produit total....	5178336338

	3452193784
	1197754648
pour 6.......	20713162704
pour 48.....	165705301632
pour 9.......	31069744056
pour 54.....	186418464336
pour 11.....	37974131624
pour 77.....	265818921368
produit total...	4134881150582708032

	34215378
	12111132
pour 11.....	376369158
pour 121....	4140060738
pour 132....	4516429896
produit total...	414386959387896

76. VII. Nous finirons par une méthode abrégée et générale, au moyen de laquelle on arrive au produit final, sans être obligé d'écrire les produits partiels intermédiaires ; et pour abréger considé-

rablement le discours, au lieu de dire, par exemple, le produit des dixaines du multiplicande par les unités du multiplicateur, nous dirons, les dixaines par les unités, de sorte que nous supprimerons les mots *le produit*, et que l'ordre d'unités, énoncées en premier lieu, sera censé appartenir au multiplicande, et l'autre par conséquent au multiplicateur.

Si l'on observe avec attention les produits partiels de quelques multiplications, on voit qu'ils sont tous disposés, de maniere à ce que les mêmes ordres d'unités soient dans une même colonne verticale; et si l'on analyse leur formation, on verra de plus, que les unités par les unités doivent toujours donner des unités, mais peuvent donner des dixaines de surplus: que, pour avoir toutes les dixaines, il faut ajouter ce surplus; 1°. aux dixaines par les unités; 2°. aux unités par les dixaines: ce qui pourra donner des centaines de surplus: que, pour avoir toutes les centaines, il faut ajouter ce surplus; 1°. aux centaines par les unités; 2°. aux unités par les centaines; 3°. aux dixaines par les dixaines: ce qui pourra donner des mille de surplus; que, pour avoir tous les mille, il faut ajouter ce surplus; 1°. aux mille par les unités; 2°. aux unités par les mille; 3. aux centaines par les dixaines; 4. aux dixaines par les centaines; ce qui pourra donner des dixaines de mille, etc.

On pourra donc donner cette regle générale, pour trouver d'un seul coup le produit de deux facteurs quelconques.

Multipliez les unités par les unités; écrivez les unités du produit, et retenez les dixaines; ensuite multipliez les dixaines par les unités, puis les unités par les dixaines, et à leur somme, joignez les dixaines retenues; écrivez les dixaines de cette

somme totale, et retenez-en les centaines; alors multipliez les centaines par les unités, ensuite les unités par les centaines, enfin les dixaines par les dixaines; au total ajoutez les centaines retenues; écrivez alors les centaines contenues dans ce nouveau total, et retenez-en les mille, pour les ajouter, 1°. aux mille par les unités; 2°. aux unités par les mille; 3° aux centaines par les dixaines; et 4°. aux dixaines par les centaines, etc. Quelques exemples éclairciront cette regle; mais, pour abréger, j'omettrai les mots, unités, dixaines, centaines, mille, etc. et je ferai les additions partielles à fur et à mesure.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{rr} & 73 \\ & 59 \\ \hline \text{produit....} & 4307 \end{array}$$

je dis : 9 fois 3 font 27, je pose 7 et je retiens 2; puis 9 fois 7 font 63 et 2 de retenus font 65, et puis 5 fois 3 font 15 et 65 font 80, je pose 0 et retiens 8 : enfin, 5 fois 7 font 35, et 8 de retenus font 43, que je pose, et j'ai pour produit final 4307, comme il est aisé de le vérifier.

77. Si les deux facteurs étoient égaux, au lieu de prendre successivement les dixaines par les unités, et les unités par les dixaines, on prendroit le double des dixaines par les unités, puisqu'alors les deux produits étant égaux, leur somme est double de l'un d'eux; ainsi soit à multiplier l'un par l'autre, les deux facteurs égaux suivans :

$$\begin{array}{r} 76 \\ 76 \\ \hline \text{produit.....}\ 5776 \end{array}$$

je dis : 6 fois 6 font 36, je pose 6 et retiens 3: 6 fois 7 font 42, dont le double est 84, qui avec 3, font 87 : je pose 7 et retiens 8; enfin, 7 fois 7 font 49 et 8 font 57 que je pose : le produit est donc 5776.

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{r} 538 \\ 647 \\ \hline \text{produit......}\ 348086 \end{array}$$

Je dis : 7 fois 8 font 56; je pose 6 et retiens 5: 7 fois 3 font 21 et 5 de retenus font 26; puis 4 fois 8 font 32, et 26 font 58; je pose 8, et retiens 5: ensuite 7 fois 5 font 35, et 5 de retenus font 40; puis 6 fois 8 font 48 et 40 font 88; enfin 4 fois 3 font 12, et 88 font 100; je pose 0 et retiens 10: je dis encore 6 fois 3 font 18, et 10 de retenus font 28; puis 4 fois 5 font 20, et 28 font 48; je pose 8 et retiens 4; enfin 6 fois 5 font 30 et 4 font 34 que je pose.

78. Si les deux facteurs étoient égaux, en appliquant le même raisonnement que ci-dessus, on verroit qu'on doit doubler les dixaines par les unités, les centaines par les unités, et les centaines par les dixaines, soit :

	456
	456
produit.....	207936

je dis : 6 fois 6 font 36, je pose 6 et retiens 3; puis 6 fois 5 font 30, dont le double est 60, et 3 font 63; je pose 3 et retiens 6, qui, ajoutés au double de 4 par 6 ou à 48, font 54, et 5 fois 5 ou 25 font 79; je pose 9 et retiens 7; je les joins à 40, double de 5 par 4, et j'ai 47, dont je pose le 7; et enfin ajoutant les 4 à 16, produit de 4 par 4, j'ai 20 que je pose.

EXEMPLE III.

	4842
	2356
produit........	11407752

je dis : 6 fois 2 font 12; je pose 2 et retiens 1, qui, avec 6 fois 4 ou 24, et 5 fois 2 ou 10, fait 35; je pose 5 et retiens 3, qui, avec 6 fois 8 ou 48, 3 fois 2 ou 6, et 5 fois 4 ou 20 font 77; je pose 7 et retiens 7, qui, avec 6 fois 4 ou 24, 2 fois 2 ou 4, 5 fois 8 ou 40, et 3 fois 4 ou 12 font 87; je pose 7 et retiens 8, qui, avec 5 fois 4 ou 20, 2 fois 4 ou 8, et 3 fois 8 ou 24, font 60; je pose 0, et retiens 6, qui, avec 3 fois 4 ou 12, et 2 fois 8 ou 16 font 34; je pose 4 et retiens 3, qui, enfin avec 2 fois 4 ou 8, font 11, que je pose.

Si les deux facteurs étoient égaux, on doubleroit les produits des dixaines, des centaines et des mille

par les unités, des centaines et des mille par les dixaines, et enfin des mille par les centaines.

79. En général, si les facteurs sont égaux, on double tous les produits, hors ceux des unités par les unités, des dixaines par les dixaines, des centaines par les centaines, etc., ce qui n'est qu'un cas abrégé de la regle ordinaire; mais ce cas nous sera utile par la suite.

Proposons-nous encore de résoudre l'exemple III, de l'article 68, où on a trouvé que le produit de 5964 par lui-méme étoit 35569296.

EXEMPLE IV.

$$\begin{array}{r} 5964 \\ 5964 \\ \hline \text{produit.......}\ 35569296 \end{array}$$

je dis : 4 fois 4 font 16; je pose 6 et retiens 1, qui avec 48 double de 6 par 4, fait 49; je pose 9 et retiens 4 : puis 4 avec 72 double de 9 par 4 font 76; qui avec 36 produit de 6 par 6, font 112; je pose 2 et retiens 11, qui avec 40 double de 5 par 4 font 51, et 108 double de 9 par 6, font 159 : je pose 9 et retiens 15, qui joints à 60, double de 5 par 6 font 75, et 81 produit de 9 par 9, font 156; je pose 6, et retiens encore 15, qui, avec 90, double de 5 par 9, font 105; je pose 5, et retiens 10, qui joints enfin à 25, produit de 5 par 5, font 35.

On voit à présent la marche; on peut la pousser aussi loin qu'on voudra, ou plutôt qu'on pourra : car il faut beaucoup d'habitude du calcul, et surtout de mémoire, pour aller de tête jusqu'au produit de 12 chiffres par 12 chiffres, surtout si les deux nombres ne sont pas égaux.

Nous ne ferons qu'une observation. il pourroit se faire que les deux facteurs n'eussent pas le même nombre de chiffres; que l'un par exemple, en eût 4, et l'autre 3: alors on mettroit un zéro sur la gauche de ce dernier; soit, par exemple, 2416 à multiplier par 654, j'écrirois;

EXEMPLE V.

	2416
	0654
produit..........	1580064

et, opérant alors, comme pour l'avant dernier, je trouverois 1580064.

Multiplication des décimales et des nouvelles unités.

80. Les regles que nous avons données pour la multiplication des nombres entiers, s'appliquent entiérement, à la virgule près, à la multiplication des décimales, et par conséquent des nouvelles unités.

En effet, ou l'un des facteurs est décimal, ou tous les deux sont décimaux.

Si l'un des facteurs est décimal, si l'on avoit, par exemple à multiplier,

2,416		654
654	ou	2,416
1580,064		1580,064

on voit que dans le premier cas, il faut prendre 654 fois 2416 milliemes, ce qui fait (ex. V), 1580064 milliemes ou 1580,064; ce qui donne le même nombre de chiffres décimaux, qu'on avoit au multiplicande. Si on prend le second cas, on verra aussi que le produit 1580064, est mille fois trop grand; puisque ce n'étoit pas par 2416 entiers; mais par 2416 milliemes, c'est-à-dire, par un nombre mille fois plus petit, qu'on devoit multiplier; donc pour le rendre à sa juste valeur, il faut le compter pour des milliemes, c'est-à-dire, écrire encore 1580,064, avec autant de chiffres décimaux qu'il y en avoit dans le multiplicateur. Comme cela seroit vrai pour tout autre cas, on peut conclure que pour multiplier deux facteurs, dont l'un est un nombre décimal; il faut opérer, comme il a été enseigné pour les nombres entiers; mais au produit séparer sur la droite, autant de chiffres décimaux qu'il y en avoit dans le facteur décimal.

81. Passons au cas où les deux facteurs sont décimaux : soit, par exemple, à trouver le produit des deux facteurs.

	4,842
	23,56
produit......	114,07752

si on suppose un instant que le multiplicateur exprime des entiers, il faudra d'abord par la regle précédente, séparer trois chiffres sur la droite du produit 11407752 (trouvé exemple III); mais par cette supposition, on a multiplié par un nombre cent fois trop grand, le produit est donc aussi cent fois trop grand; il faut donc le rendre cent

fois plus petit; ce qu'on fera (32) en reculant encore la virgule de deux rangs, ou en tout de cinq rangs vers la gauche : on aura donc en tout cinq chiffres décimaux, c'est-à-dire, autant qu'il y en avoit dans les deux facteurs réunis. Quoique ceci ait lieu pour tout autre cas ; il en est un cependant, qui présente une difficulté, qu'il est bon de prévenir. Il pourroit se faire qu'en voulant exécuter la partie de la regle, qui concerne la place de la virgule, il n'y eût pas assez de chiffres au produit, pour y satisfaire. Supposons, par exemple, qu'on eût à multiplier l'un par l'autre.

0,0496	ou	0,0036
0,0036		0,0496
1 488		216
2976		324
		144
0,00017856		0,00017856

En multipliant, on trouveroit pour produit 17856, dont la regle prescrit de séparer huit chiffres de droite à gauche, tandis qu'il ne s'y en trouve que cinq ; mais cette difficulté est aisée à résoudre : car pour cela, il suffit de mettre assez de zéros sur la gauche du produit, pour qu'on puisse séparer les huit chiffres prescrits : on écriroit donc le produit, tel qu'on le voit ci dessus. On demandera peut-être, si on ne pourroit pas l'écrire aussi de cette maniere 0,17856000, en mettant les trois zéros sur la droite : nous répondrons que non : car alors on ne sépareroit réellement que cinq chiffres et non pas huit, puisque 0,17856000 ne vaut que 0,17856.

82. On voit par la seconde multiplication ci-dessus qu'en renversant l'ordre des deux facteurs, on eût obtenu absolument le même produit; comme on l'a vu pour les nombres entiers; ce qui ne peut-être autrement, puisque, dans cette inversion, le nombre des chiffres décimaux reste le même, et que l'on multiplie d'ailleurs les deux facteurs, comme s'ils étoient des entiers.

Tirons donc de tout ce qu'on vient de dire cette regle générale, pour multiplier deux nombres décimaux quelconques.

On multipliera, comme si ces nombres étoient des entiers; mais on séparera par une virgule, sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux, qu'il y en avoit dans les deux facteurs réunis; et, si le produit n'avoit pas assez de chiffres, on y suppléeroit par des zéros placés sur sa gauche.

83. On peut, et nous venons d'en donner un exemple, appliquer toutes les abréviations, enseignées à la fin du chapitre précédent, à la multiplication des décimales, et des nouvelles unités. Quant à celles ci, nous allons finir par leur appliquer la regle génerale que nous venons de donner.

Soit donc proposé de résoudre les deux problémes suivans :

1°. Combien coûteront 54 mt. 925 millimetres, à raison de 9,f. 55 centimes le metre?

2°. Combien aura-t on de décigrammes pour 75,f. 45 centimes, à raison de 1,d.g. 745 pour 1f..

On voit que, dans le premier cas, le produit doit être des francs; il faudroit donc multiplier 9,f. 55 par 54,mt. 925. Mais il sera plus court de multiplier 54,f. 925 par 9 55; voyez ci-dessous l'exemple I. Quant au second cas, on voit aisément que le produit doit être des décigrammes;

ainsi on multipliera 1,d.g. 745, par 75,45; comme dans l'exemple II.

EXEMPLES

I.	II.
f. 54,925	dég. 1,745
9,55	75,45
274625	8725
274625	6980
494325	8725
	12215
réponse.. f. 524,53375	réponse.. d.g. 131,66025

Méthode abrégée pour la multiplication des décimales, et des nouvelles unités.

84. On vient de trouver pour le prix de 54,mt. 925, 524 f, 53375; mais il est fort inutile, et cela arrive dans mille autres occasions, d'avoir un tel degré de précision. On pourroit, par exemple, n'avoir besoin de connoître le prix cherché qu'à un centime ou qu'à un décime près; c'est-à-dire, ne demander le produit qu'avec deux, ou même une décimale. Alors on pourroit bien effacer tous les chiffres suivans, ce qui donneroit ou 524 f, 53 ou 524f,5. Il en seroit de même du second produit ci-dessus, qui se réduiroit, dans la même supposition, ou à 131 d.g,66, ou à 131 d.g,7 : nous écrivons 7 et non 6, parce que 0,7d.g, ou 0,70d.g, approchent plus de 66d.g que 0,6 ou 0,60. Mais il est une voie plus abrégée, pour arriver à l'approximation qu'on desire.

85. Supposons qu'on ne veuille avoir le premier

produit qu'à un centime, et le second qu'à un décigramme.

On a vu (64) qu'il étoit indifférent de commencer à multiplier par le premier chiffre à droite, ou à gauche du multiplicateur. Nous allons commencer ici par le premier chiffre à gauche, parce que ce moyen nous menera plus droit à notre but.

f.	deg.
54,925	1,745
9,55	75,45
494,325 |	122,15 |
27,462 | 5	8,72 | 5
2,746 | 25	0,69 | 80
	0,08 | 725
f. 524,53375	deg. 131,66025

En mettant par-tout la virgule à la place qui lui convient, et en séparant par une ligne verticale les chiffres décimaux, qui sont inférieurs d'un degré à celui qu'on demande ; c'est-à-dire, en séparant dans le premier cas les milliemes, puisqu'on se borne aux centiemes ; et dans le second, les centiemes, puisqu'on se borne aux dixiemes, on voit que tous les chiffres décimaux, placés à droite de la ligne verticale, n'influant que sur les décimales inférieures d'un degré à celles qu'on demande, n'influeront point, ou du moins que bien peu, sur celles-ci. On aura donc atteint le but de la question, si l'on trouve un moyen d'éviter de faire tous les produits qui donnent ces décimales superflues. Or ce moyen le voici : Renversez tout le multiplicateur, et écrivez-le sous le multiplicande, de maniere que le chiffre des unités soit sous la décimale inférieure d'un degré à celle où vous voulez borner votre produit

produit. Alors multipliez comme à l'ordinaire, mais en observant 1°. de ne commencer chaque multiplication partielle, qu'au chiffre de multiplicande, immédiatement au-dessus de celui du multiplicateur par lequel vous multipliez ; et 2°. de poser le premier chiffre à droite de chaque produit, les uns sous les autres. Le produit total trouvé, vous n'aurez plus qu'à supprimer le dernier chiffre à droite, et qu'à mettre la virgule au rang demandé.

Opérons maintenant de cette maniere sur les deux exemples donnés : pour cela,

54,925	1,745
559	5 457
494,325	122,15
27,460	8,70
2,745	68
	5
524,530	131,58

Je retourne les multiplicateurs 9,55 et 75,45, et je place 559 et 5457 sous les multiplicandes 54,925 et 17,45, de maniere que les chiffres des unités 9 et 5 soient sous les 5 milliemes dans l'un, et sous les 4 centiemes dans l'autre. Ensuite je multiplie comme à l'ordinaire, mais en observant les deux conditions prescrites par la regle. Enfin je supprime de part et d'autre le dernier chiffre du produit ; mais dans le second, j'écris 6 dixiemes au lieu de 5, parce que 0,60 approche plus de 0,58 que 0,50. Par là, j'ai précisément les mêmes produits que j'avois déjà trouvés dans l'un jusqu'aux centiemes, et dans l'autre jusqu'aux dixiemes.

Il suffira de comparer les quatre regles, pour voir l'identité qui regne, deux à deux, entre les produits

Digitized by Google

partiels, et pour se convaincre que, par l'arrangement prescrit, chaque chiffre du multiplicateur se trouve placé sous le chiffre du multiplicande, par lequel doit commencer chaque produit partiel; et qu'en mettant les uns sous les autres les premiers chiffres de chacun de ces produits, on ne fait que les ranger à leur place, puisque tous expriment des décimales du même ordre.

86. Cette regle sera suffisante, tant que les facteurs n'auront pas beaucoup de chiffres ; mais si le nombre des chiffres devenoit considérable, on sent qu'alors le produit des chiffres, qu'on néglige à chaque multiplication partielle, influeroit à la fin sur les unités mêmes de l'ordre où l'on s'arrête. Pour éviter cet inconvénient, il est deux moyens, et tous deux ont beaucoup de rapport avec celui que nous avons enseigné ; car le premier n'en differe, qu'en ce qu'au commencement, on pose le chiffre des unités du multiplicateur, sous la décimale inférieure, non d'un degré, mais de deux à celle où doit se borner le produit ; et en ce qu'à la fin on retranche, non un chiffre, mais deux sur la droite de ce produit. Veut-on se servir du second moyen ? Alors, à chaque produit partiel, on commencera la multiplication au chiffre du multiplicande, qui est voisin à droite de celui que prescrit la regle générale, en ajoutant de plus 1 à ce chiffre, si son voisin, encore à droite, est 5 ou surpasse 5; mais on négligera les unités de ce produit, et retenant seulement les dixaines, qu'on augmentera de 1, si les unités surpassent 5, on les ajoutera au produit suivant, qu'on trouvera, ainsi que le reste, au moyen de la regle générale.

Pour être en état de comparer toutes les parties de ces différentes regles, nous allons faire la multiplication suivante, d'abord par la regle ordinaire,

mais en commençant à multiplier par la gauche, et ensuite par chacune des trois regles abrégées. Soit donc à multiplier, à un cent-millieme près, 36,3456789658 par 2,4676589.

I.

36,34567	89658
2,46765	89
72,69135	79316
14,53827	158632
2,18074	0737948
25441	97527606
2180	740737948
181	7283948290
29	07654317264
3	271111106922
89,68873	817649916562

II.

36,34567	89658
98 567642	
72,69135	6
14,53826	8
2,18073	6
25441	5
2180	4
181	5
28	8
2	7
89,68870	9

III.

36,34567	89658
9 85676	42
72,69135	78
14,53827	12
2,18074	02
25441	92
2180	70
181	70
29	04
3	24
89,68873	52

I V.

```
36,34567 89658
98 56764 2
--------------
72,69135|8
14,53827|2
 2,18074|1
   25442|0
    2180|8
     181|7
      29|0
       3|2
--------------
89,68873|8
```

Les trois premieres opérations sont trop claires pour avoir besoin d'être expliquées : quant à la quatrieme, ce que nous allons dire sur la formation de la premiere et de la seconde lignes, suffira pour entendre celle de toutes les autres. Au lieu de dire, comme dans la seconde regle, 2 fois 8 font 16, nous avons commencé à multiplier par 2 le chiffre 9 qui est à droite de 8 ; mais comme le chiffre à droite de 9 est plus grand que 5, nous avons dit, non 2 fois 9 font 18, mais 2 fois 10 font 20 ; négligeant alors le chiffre 0 des unités, nous avons retenu les 2 dixaines, pour les ajouter au produit 16 de 8 par 2 ; ce qui a donné 18 : alors posant 8 et retenant 1, nous avons continué l'opération comme dans la seconde regle. Pour trouver la seconde ligne, nous avons dit, non 4 fois 8, parce que 8 est suivi du chiffre 9 plus grand que 5, mais 4 fois 9 font 36 ; alors négligeant les unités, nous avons retenu les dixaines, en les comptant pour 4, et non pour 3, parce que les unités négligées surpassent 5. Ensuite continuant, comme on l'a enseigné dans la regle générale, nous avons

dit 4 fois 7 font 28 et 4 retenus font 32 : nous avons posé 2, etc.

En comparant les trois regles abrégées avec la regle ordinaire, on voit d'abord que le premier produit differe du véritable de 3 unités de l'ordre demandé ; ce qui devoit être, d'après ce que nous avions dit dès le commencement de cet article : et ensuite que le quatrieme produit s'accorde avec le véritable, non-seulement jusqu'aux cent-milliemes, mais même jusqu'aux millioniemes, propriété que n'a pas le troisieme produit. Aussi dorénavant employerons-nous de préférence la troisieme abréviation en laissant subsister, quand le cas le requerra, le dernier chiffre du produit.

87. Quelqu'abréviation qu'on adopte, nous allons obvier à une difficulté qui pourroit se présenter. Il seroit possible que le multiplicande n'eût pas assez de chiffres pour qu'on pût leur faire correspondre, d'après la regle, les chiffres du multiplicateur. Dans ce cas, il suffiroit de mettre un nombre de zéros suffisant à la suite de ce multiplicande. Ainsi si l'on demandoit, à un millieme près, le produit de 5,342 par 3,927, je mettrois 1 ou 2 zéros à la suite de 5,342, selon la regle abrégée dont je voudrois me servir, et j'opérerois ensuite, selon la nature de chacune.

I.	I I.
5,342	5,3420
3,927	7293
20,978034	16026|0
	4807|8
	106|8
	37|1
	20,977|7

III.	IV.
5,34200	5,3420
7293	7293
16026|00	16026|0
4807|80	4807|8
106|84	106|8
37|38	37|4
20,978|02	20,978|0

Nous avons cherché encore le produit de 4 manieres, comme ci-dessus, afin qu'on fût de nouveau en état de les comparer. Quant au premier produit, nous l'avons trouvé par l'abréviation enseignée (Ex. III. 78)

De la division des Nombres entiers.

88. On a vu, au commencement du chapitre précédent, que 224 étoit formé de 56 répété 4 fois. Donc le produit 224 contient 4 fois le facteur 56; et comme on a vu aussi qu'on auroit le même produit 224, en répétant 56 fois 4, il s'ensuit que le produit 224 contient aussi 56 fois l'autre facteur 4; donc, si l'on avoit une regle pour trouver combien de fois un produit contient l'un de ses facteurs, ce combien de fois seroit exprimé par l'autre facteur.

Ainsi qu'on a vu (56) que la multiplication n'etoit qu'une addition abrégée, de même on peut faire voir que cette regle qu'on demande, n'est qu'une soustraction abrégée. En effet, il est clair que, dans notre exemple, 56 est contenu dans 224 autant de fois qu'il peut en être soustrait. Retranchons donc successivement 56 de 224, et nous aurons pour restes consécutifs 168, 112, 56 et 0,

224	168	112	56
56	56	56	56
168	112	56	0

L'on voit par-là que 224 n'est que 56 répété 4 fois, et que par conséquent il contient 4 fois 56. De même si l'on retranchoit 4, 56 fois de suite de 224, on parviendroit à épuiser entiérement 224; d'où l'on concluroit que 224 contient 56 fois 4; mais on sent que dans ce cas, et dans tous ceux où il faudroit répéter la soustraction un grand nombre de fois, l'opération deviendroit rebutante : il étoit donc essentiel d'y substituer une regle abrégée.

Cette regle est trouvée, et comme chercher combien de fois 224 contient 56, ou diviser 224 en 56 parties égales, conduisent évidemment au même résultat, on a nommé cette regle *division*. Ainsi il faut entendre par *division*, la regle qui enseigne à trouver combien de fois un nombre en contient un autre. Le nombre qui contient s'appelle *dividende*; celui qui est contenu, *diviseur*; et le résultat *quotient*, du mot latin *quoties*, qui signifie *combien de fois*, parce qu'en effet, il apprend combien de fois le dividende contient le diviseur.

89. On a vu (88) que le dividende peut être regardé comme le produit d'une multiplication, dont le diviseur et le quotient seroient les facteurs; donc en multipliant le diviseur par le quotient, ou le quotient par le diviseur, on doit produire le dividende : et réciproquement si on divise un produit par un de ses facteurs, on doit avoir l'autre pour quotient. On vient de voir encore que la division revenoit aussi à partager un nombre en plusieurs parties égales. Donc diviser par 2, 3, 4, 5, etc., revient à partager un nombre en 2, 3, 4, 5, etc., parties égales. Dorénavant nous

dirons, au lieu de ces mots, prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquieme, etc. d'un nombre.

90. Nous allons faire ici, sur la nature des unités du dividende, du diviseur et du quotient, des réflexions analogues à celles que nous avons faites dans la multiplication (60) sur la nature des unités des facteurs et du produit.

Ce n'est ni par le dividende, ni par le diviseur; mais par l'état de la question qu'on doit juger de la nature des unités du quotient. En effet, il pourroit se faire qu'avec un dividende et un diviseur absolument les mêmes, soit par leurs valeurs en nombres, soit par l'espece de leurs unités, on eût cependant des quotients, fort différens entr'eux par la nature de leurs unités. Si, par exemple, on avoit 6 francs à diviser par 2 francs, on peut prouver que, selon la question qu'on proposera, on peut avoir pour quotient, ou le nombre abstrait 3, ou les nombres concrets 3 personnes, 3 francs ou 3 unités quelconques, comme 3 aunes, 3 metres, 3 grammes, etc. 1°. On aura le nombre abstrait 3, si l'on propose de savoir combien 6 francs contiennent de fois 2 francs. On aura pour quotient 3 personnes, s'il s'agit de trouver entre combien de personnes il faut partager 6 francs, pour que chacune ait 2 francs. On aura trois francs si l'on a à résoudre cette question : combien 6 francs doivent-ils rapporter d'intérêt, en supposant que 2 francs aient rapporté 1 franc ? Enfin l'on aura 3 aunes, 3 metres, 3 grammes, etc., selon qu'il s'agira d'aunes, de metres, de grammes, etc. dans la question suivante : à deux francs l'aune, ou le metre, ou le gramme, etc., combien aura-t-on pour 6 francs, d'aunes, de metres, de grammes, etc. ?

91. Parcourons maintenant tous les cas de la division, en commençant par les plus simples.

Si l'on suppose d'abord que l'on ait deux nombres simples à diviser l'un par l'autre, comme 6 par 2, ou un nombre composé, mais qui ne soit pas plus grand que 81, à diviser par un nombre simple, comme 72 par 9; pour trouver le quotient dans ces deux cas, au moyen de la table intérieure (P. xlvij), on cherchera les diviseurs 2 et 9 dans la premiere colonne horisontale; et ensuite on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on tombe sur les dividendes 6 et 72; alors allant horisontalement de droite à gauche, on trouvera dans la premiere ligne verticale, 3 et 8, qui seront les quotiens demandés. Ce qui est évident, puisque, par la construction même de la table, 72, par exemple, n'étant autre chose que 9 répété 8 fois, il s'ensuit (88) que 72 contient 8 fois 9. On trouveroit les mêmes quotiens, 3 et 8, si, après avoir trouvé les diviseurs 2 et 9 dans la premiere colonne verticale, on eût été horisontalement de gauche à droite, jusqu'à la rencontre des dividendes 6 et 72, et qu'on fût remonté verticalement jusqu'à la premiere colonne horisontale.

92. Il pourroit se faire que le dividende ne contînt pas le diviseur un nombre juste de fois: si, par exemple, on avoit 9 francs à diviser entre 4 personnes; pour savoir ce qui doit revenir à chacune, on voit qu'il s'agit de diviser 9 par 4, sauf à ce que ce quotient exprime des francs. Or, si par l'une des méthodes précédentes on cherche ce quotient, on trouvera d'abord que le dividende 9 tombe entre les nombres 8 et 12, et ensuite qu'à ces nombres répondent les deux quotiens 2 et 3, qui different d'une unité; le vrai quotient est donc entre 2 et 3; ce qui indique que la part de chaque personne est de plus de 2 francs, mais moindre que 3; ce qui d'ailleurs est évident, puisqu'à 2 francs par personne, les 4 auroient ensemble 8 francs, d'où il ré-

sulteroit encore 1 franc à partager entr'elles, et qu'à 3 francs par personne, les 4 auroient en tout 12 francs, somme plus grande de 3 francs, que les 9 qu'il s'agissoit de partager. Quant à ce reste, on le trouvera aisément, en multipliant le diviseur 4 par le quotient 2, ce qui donnera 8, et en le retranchant du dividende 9, ce qui donnera 1; opération qui paroîtra fort claire, si l'on fait attention que le dividende 9 est égal à 8 plus 1, et que 8 est égal à 2 fois 4; c'est-à-dire, au produit du diviseur par le quotient.

Dans ce cas, et tout autre semblable, pour marquer qu'il y a encore un reste à partager, on écrit à côté du quotient, ce reste, qu'on place au-dessus du diviseur, dont on a soin de le séparer par un trait. Ainsi pour exprimer ci-dessus que chaque personne a pour sa part 2 francs, et qu'il reste 1 franc à partager entre les 4, on écriroit 2 fr. $\frac{1}{4}$. Si on avoit eu 69 francs à partager entre 9 personnes, chacune eût eu 7 francs, et il seroit resté 6 francs à partager entre 9; alors le quotient eût été exprimé par 7 fr. $\frac{6}{9}$.

93. Si le dividende et le diviseur étoient des nombres plus considérables, pourvu toutefois que le premier ne passât pas 144, ni le second 12; alors, au moyen du supplément de la table, on pourroit opérer précisément, comme il a été dit ci-dessus. Si j'avois, par exemple, 132 à diviser par 11, je chercherois le diviseur 11 dans la premiere colonne horisontale, et ensuite je descendrois verticalement, jusqu'à ce que je trouvasse 132, et le nombre 12, qui seroit vis-à-vis dans la premiere colonne verticale, seroit le quotient demandé; et si le dividende, au lieu d'être 132, étoit 128, par exemple, je verrois que ce dividende 128, tombe entre 121 et 132, auxquels répondent les quotiens 11 et 12. Le vrai

quotient seroit donc 11, plus un reste 7, que je trouverois en retranchant 121 de 128 (92) : le quotient total seroit donc 11 $\frac{7}{11}$.

Voici quelques exemples des deux cas ci-dessus, pour exercer le lecteur.

EXEMPLES.

I.

Divid. 9 { 3 diviseur.
9 { 3 quotient.

reste 0

II.

Divid. 15 { 3 diviseur.
15 { 5 quotient.

reste 00

III.

Divid. 72 { 7 diviseur.
70 { 10 $\frac{2}{7}$ quot.

reste. 2

IV.

Divid. 99 { 11 diviseur.
99 { 9 quotient.

reste 00

V.

Dividende.... 137 { 12 diviseur.
132 { 11 $\frac{5}{12}$ quotient.

reste..... 5

Pour distinguer le dividende du diviseur, on a mis celui-ci à droite du premier, dont on l'a séparé par une accolade ; ensuite, ayant trouvé le quotient, on l'a mis sous le diviseur, dont on l'a séparé par un trait ; puis on a multiplié le diviseur par le quotient, on a porté le produit sous le dividende, dont on l'a soustrait ; enfin l'on a écrit le reste au-dessous ; et quand ce reste a été autre que zéro, on l'a placé à côté du quotient, ainsi qu'on vient de l'enseigner.

Sur quoi nous observerons que, pour abréger, au lieu d'enoncer $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{12}$, ainsi : 2 divisé par 7, 5 divisé par 12, on dit 2 septiemes, 5 douziemes, en énonçant d'abord le reste, et ensuite le diviseur, mais en donnant à celui-ci la terminaison *ieme*. Il faut cependant excepter les diviseurs 2, 3, 4, qu'on prononce demie, tiers et quart : ainsi $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ se disent 1 demie, 2 tiers, 3 quarts, et non 1 deuxieme, 2 troisiemes, 3 quatriemes. Il faut se familiariser beaucoup avec les quotiens de l'espece ci-dessus ; car on va voir que dans les divisions les plus compliquées, il ne s'agit que de trouver de pareils quotiens.

94. Venons présentement au cas où le diviseur étant un nombre simple, le dividende est un nombre quelconque; et d'abord, pour nous faire mieux comprendre, multiplions, par un nombre simple, un nombre quelconque de plusieurs chiffres, par exemple 158 par 6, de la maniere suivante :

$$\begin{array}{r} 158 \\ 6 \\ \hline 48 \\ 30. \\ 6.. \\ \hline 948 \end{array}$$

C'est-à-dire, multiplions séparément par 6 les 8 unités, les 5 dixaines et la centaine de ce nombre, et nous aurons pour produits partiels, 48 unités, 30 dixaines, et 6 centaines : or, dans cet état, on voit que, puisque la division est l'inverse de la multiplication, il ne faudra, pour diviser le produit total 948 par 6, que diviser les produits partiels 6 centaines, 30 dixaines, et 48 unités par 6, ou en prendre le sixieme (89); ce qui peut se faire également en

commençant, ou par les plus hautes ou par les plus basses unités, soit en disant : le sixieme de 6 centaines est 1 centaine; le sixieme de 30 dixaines est 5 dixaines ; et enfin le sixieme de 48 unités est de 8 unités : ou bien le sixieme de 48 unités est de 8 unités ; le sixieme de 30 dixaines est de 5 dixaines; et le sixieme de 6 centaines est 1 centaine ; car on aura également des deux manieres 1 centaine, 5 dixaines et 8 unités, ou 158. Cela posé, exécutons les mêmes opérations sur le produit total, qui est le seul qu'on connoisse, lorsqu'on propose une division à faire. Il faudra donc prendre successivement le sixieme des centaines, des dixaines et des unités de 148 ; mais comme le produit des 8 unités, par le multiplicateur 6, fait refluer 4 dixaines sur le produit des 5 dixaines par 6, et que ce dernier produit fait à son tour refluer 3 centaines sur le produit de 1 centaine par 6 ; on voit que l'opération est plus simple et plus commode, en commençant par la gauche : j'opere donc comme il suit.

EXEMPLE I.

Dividende..	948	6 diviseur
	6	158 quotient
1e. reste......	34	
	30	
2e. reste......	48	
	48	
3e. reste......	00	

Après avoir placé le diviseur 6 à gauche du dividende 948, et les avoir séparés par une accolade, je dis : le sixieme de 9 centaines est 1 centaine ; j'écris ce quotient sous le diviseur, dont je le sépare par

une ligne ; ensuite je multiplie ce diviseur 6 par le quotient 1 centaine, et j'ai 6 centaines, que je porte sous les 9 centaines ; je fais la soustraction, et il ne me reste plus que 3 centaines, que je décompose en 30 dixaines, auxquelles je réunis les 4 dixaines du dividende : je prends alors le sixieme de 34 dixaines, ce qui me donne 5 dixaines, que j'écris au quotient, à droite des centaines ; je multiplie le diviseur 6 par ce second quotient 5 dixaines, et j'ai 30 dixaines, que je porte sous les 34 dixaines ; il me reste 4 dixaines, que je convertis en unités ; ce qui m'en fait 40, auxquelles je joins les 8 unités du dividende : j'ai donc en tout 48 unités, dont le sixieme est de 8 unités, que je porte au quotient, à côté des dixaines : enfin je multiplie le diviseur 6 par ce nouveau quotient 8, ce qui me donne 48 unités, que je porte sous le second reste. Soustraction faite, il ne reste rien ; d'où je conclus que 948 contient 6, 158 fois justes. On voit que toutes ces opérations n'ont eu pour but que de décomposer 948 en 6 centaines, 30 dixaines et 48 unités, comme ci dessus, et que de chercher séparément le sixieme de ces trois différentes parties.

EXEMPLE II.

Dividende...	49491 f.	9 diviseur
	45	5499 f. quotient
1er. reste.....	44	
	36	
2e. reste......	89	
	81	
3e. reste......	81	
	81	
4e. reste......	00	

Proposons-nous, pour second exemple, de diviser 49491 francs entre 9 personnes. Ayant placé le dividende et le diviseur à l'ordinaire, je décompose le dividende en ses différentes unités, à commencer par les plus hautes, c'est-à-dire, par les dixaines de mille : je prends donc d'abord le neuvieme de 4 dixaines de mille ; mais comme il ne fait pas même 1 dixaine de mille, je les décompose, par la pensée, en 40 mille, qui, joints aux 9 suivans, font 49 mille ; alors je dis : le neuvieme de 49 mille est 5 mille, que je porte au quotient ; alors multipliant le diviseur 9 par ce quotient 5 mille, j'ai 45 mille, que j'écris sous le premier dividende partiel 49 ; la soustraction faite, il me reste 4 mille, que je décompose en 40 centaines, auxquelles je réunis les 4 du dividende, et j'ai, pour second dividende partiel, 44 centaines, dont je prends le neuvieme ; j'ai pour quotient 4 centaines, que je porte à côté des 5 mille du quotient ; je multiplie le diviseur 9 par 4 centaines ; j'ai 36 centaines, que je porte sous 44 pour l'en soustraire ; le reste est 8 centaines, qui font 80 dixaines, et 89 avec les 9 dixaines du dividende proposé : je prends alors le neuvieme de ce troisieme dividende partiel ; ce neuvieme est 9, que je porte à côté des centaines du quotient ; je multiplie le diviseur 9 par ce nouveau quotient 9 dixaines, et j'ai pour produit 81 dixaines, que je porte sous les 89 ; je les en soustrais, et j'ai pour reste 8 dixaines, que je réduis en 80 unités, à côté desquelles je descends le chiffre 1 des unités du dividende, ce qui fait 81 unités : alors je prends le neuvieme de ces 81 unités, et j'ai 9 unités, que je porte à droite des dixaines du quotient; je multiplie enfin le diviseur 9 par ces 9 unités, et j'ai pour produit 81 unités, que je porte sous le dernier dividende partiel 81 ; la soustraction faite, il me reste zéro. D'où je conclus que 49491 francs, parta-

gés entre 9 personnes, donnent 5499 francs justes, pour la part de chacune.

95. Nous n'avons détaillé tout au long les deux exemples précédens, que pour en faire mieux sentir les différentes parties. Mais la regle une fois bien comprise, on peut en simplifier beaucoup les détails, tant pour les raisonnemens que pour les opérations. 1°. Pour les raisonnemens : car chaque dividende partiel donnant un quotient de même espece que lui, et auquel les chiffres suivans de ce même quotient assigneront la valeur qui lui convient, il s'ensuit que l'on peut omettre les noms des différentes unités de ces dividendes, et des quotiens partiels ; qu'ainsi en prenant pour exemple le premier dividende et le premier quotient partiels de l'exemple II ; au lieu de dire tout au long : le neuvieme de 49 mille est de 5 mille, il suffira de dire : le neuvieme de 49 est de 5. 2°. Pour les opérations : car avec un peu d'exercice, ou avec le secours de la table de multiplication, au lieu de multiplier chaque fois le diviseur par un quotient partiel, de poser ensuite le produit sous le reste partiel correspondant, et de faire la soustraction, il sera aisé de trouver d'un seul coup le quotient et le reste. Ainsi, en prenant encore 49 pour exemple, après avoir trouvé le quotient 5, au lieu de multiplier pour avoir le reste 4, on dira : le neuvieme de 49 est de 5 pour 45, et il reste 4. Voici donc comment on pourroit énoncer et exécuter, le plus briévement possible, l'opération cidessus. L'on diroit : le neuvieme de 49 est 5 pour 45, et il reste 4 ; je pose 5 au quotient, et joignant par la pensée le reste 4 au chiffre suivant 4 du dividende, j'ai 44, dont le neuvieme est 4 pour 36, avec le reste 8 : je pose le 4 au quotient, et joignant le reste 8 au chiffre suivant 9, j'ai 89, dont le neuvieme est 9 pour 81, avec un reste 8 : je

je porte le 9 au quotient, et joignant le reste 8 au dernier chiffre 1, j'ai 81, dont le neuvieme est sans reste 9, que je porte au quotient. L'on pourroit aussi porter chaque chiffre du quotient sous le dernier chiffre du dividende partiel correspondant, comme on le voit ici.

Dividende...	49491	9 diviseur
Quotient.....	5499	

96. Il pourroit se faire que dans le cours des divisions partielles, le dividende ne contînt pas le diviseur; alors, afin de conserver aux chiffres du quotient leur valeur, on mettra un zéro pour exprimer ce quotient partiel. Ainsi si j'avois 8328 à diviser par 8, je dirois le huitieme de 8 est 1, sans reste; le huitieme de 3 n'est pas même 1, je mettrois un zéro; ensuite le huitieme de 32 est 4, sans reste; enfin le huitieme de 8 est 1. Voyez l'exemple.

Dividende...	8328	8 diviseur
Quotient....	1041	

L'on voit que le 0 mis après le 1, fait valoir à ce chiffre 1 des mille, comme cela doit être en effet.

Il pourroit même arriver que deux ou un plus grand nombre de dividendes partiels ne continssent pas le diviseur; alors on remplaceroit les quotiens partiels par autant de zéros. Ainsi dans

70035	7
10005	

je mettrois trois zéros au quotient, parce que les trois dividendes partiels 0, 0 et 3, ne contiennent

pas le diviseur 7. La raison en est la même que ci-dessus.

97. La regle seroit la même si le diviseur, au lieu d'être un nombre simple, étoit ou 11 ou 12. Un exemple suffira : soit 20808 fr. à diviser entre 12 personnes.

Dividende... 20808 f. { 12 diviseur
Quotient..... 1734

Je dis : le douzieme de 20 est 1, que je pose sous le zéro, et il reste 8, qui, joints au chiffre suivant 8, fait 88, dont le douzieme est 7, que je mets sous le 8, et il reste 4, qui, joints au 0, font 40, dont le douzieme est 3, que j'écris sous le zéro; et il reste 4, qui, joints au 8, font 48, dont le douzieme est sans reste 4, que je mets sous le 8. La part de chaque personne est donc juste de 1734 f. Ce qu'on peut d'ailleurs aisément vérifier, en multipliant le diviseur par le quotient; car on doit (89) reproduire le dividende; et c'est ce qui a lieu en effet, puisque 12 fois 1734 font 20808.

Il peut arriver qu'il y ait un reste à la fin de l'opération; alors on se conduiroit comme on l'a enseigné (92 et 93). Ainsi, si j'avois 4354 à diviser par 9, ou 54189 par 11

Divid. 4354 { 9 div. divid. 54189 { 11 div.
Quot.. 483 $\frac{7}{9}$ quot. 4926 $\frac{3}{11}$

je trouverois dans le premier exemple, pour quotient, 483 avec un reste 7, et dans le second, 4926 avec un reste 3; j'écrirois donc pour quotient 483 $\frac{7}{9}$ et 4926 $\frac{3}{11}$.

98. Si l'on avoit un nombre à diviser par 10, alors

Digitized by Google

l'opération seroit fort simple ; le quotient seroit ce nombre lui-même, à l'exception du dernier chiffre à droite, qu'on regarderoit comme le dernier reste d'une division, et qu'on mettroit par conséquent au-dessus de 10, dont on le sépareroit par un trait. Ainsi 94 divisé par 10, donneroit pour quotient $9\frac{4}{10}$. 5647 divisé par 10, donneroit $564\frac{7}{10}$. Pour donner la raison de cette regle, prenons d'abord pour dividende un nombre terminé par un zéro, 540, par exemple : on voit que ce nombre fait 54 dixaines, ou 54 fois 10. Or un produit divisé par un de ses facteurs (89), donne pour quotient l'autre facteur; donc le produit des deux facteurs 54 et 10, divisé par le facteur 10, doit donner pour quotient le second facteur 54. Donc d'abord, si on divise par 10 un nombre terminé par un zéro, pour avoir le quotient, il suffit de supprimer ce zéro. Soit à présent un nombre quelconque, le nombre 5647 ci-dessus, par exemple ; on peut regarder ce nombre comme formé de ces deux-ci 5640 et 7, dont le dixieme est évidemment 564 avec un reste 7. Ce quotient est donc $564\frac{7}{10}$, comme l'avoit donné la regle générale, énoncée au commencement de cet article.

Finissons par quelques exemples.

EXEMPLES.

I

Divid.	497	7 div.
Quot..	71	

II

divid.	37495	9 div.
quot.	$4166\frac{1}{9}$	

III.

divid.	3740|0	10 div.
quot.	3740	

IV.

divid.	1474	10 div.
quot.	$147\frac{4}{10}$	

V.		VI.	
divid. 37495044	12 div.	divid. 341517004	11 div.
quot. 3124587		quot. 31047000 $\frac{4}{11}$	

99. Voyons enfin le dernier cas ; c'est-à-dire, celui où le dividende et le diviseur sont tous les deux des nombres composés de tant de chiffres qu'on voudra.

Pour saisir facilement l'ensemble des différens procédés qu'il faut suivre pour la division, prise dans le cas le plus général, voyons ce qui se passe dans la formation du produit de deux nombres composés, par exemple, de 8273 et de 7146.

Multiplicande	8273	diviseur.
Multiplicateur	7146	quotient.
4e produit	49638	4e dividende partiel.
3e produit	33092	3e dividende partiel.
2e produit	8273	2e dividende partiel.
1er produit	57911	1er dividende partiel.
Produit total	59118858	dividende total.

On voit, avec la moindre attention :

1°. Que le produit total est composé d'autant de produits partiels, que le multiplicateur a de chiffres ; donc, puisque le produit de toute multiplication doit être (88) regardé comme le dividende d'une division, où le multiplicande fait l'office de diviseur, et où le multiplicateur est le quotient, il s'ensuit d'abord qu'un dividende proposé doit être composé d'autant de dividendes partiels que le quotient doit avoir de chiffres. Donc, d'abord, il faut que le dividende total soit séparé en autant de

dividendes partiels que le quotient doit avoir de chiffres.

2°. Que chaque produit partiel exprime des unités de même espece que le chiffre du multiplicateur qui l'a produit ; par exemple, que le premier produit partiel 57911 exprime des mille, de même que le chiffre 7 du multiplicateur dont il est provenu. Il suit donc de là que chaque division partielle doit donner un quotient partiel de même espece que son dividende.

3°. Mais comme, dans chaque multiplication partielle, les chiffres de chaque produit et de chaque multiplicateur partiel, exprimant par la place qu'ils occupent, le rang de leurs unités, on fait abstraction de ce rang, pour les regarder comme des unités simples ; de même, dans chaque division partielle, on pourra regarder chaque dividende et chaque quotient partiels, comme exprimant des unités simples ; et en effet, les chiffres qui seront dans le quotient total, donneront à ceux qui les précedent, leur véritable valeur.

100. 4°. On voit encore que chaque produit partiel, par un chiffre significatif du multiplicateur, doit avoir au moins autant de chiffres que le multiplicande, et ne peut en avoir qu'un de plus : il doit en avoir au moins autant ; car le produit d'un nombre quelconque par 1, qui est le plus petit des chiffres significatifs, donne un produit égal á ce nombre même : il ne peut avoir qu'un chiffre de plus ; car s'il pouvoit en avoir deux, ce seroit dans le cas où le multiplicateur seroit un 9, qui étant le plus grand des chiffres significatifs, donneroit le plus grand produit, et où ensuite le multiplicande seroit pris, de maniere à ce qu'il refluât le plus d'unités possibles, sur le produit du premier chiffre à droite de ce multiplicande par le multi-

plicateur 9 ; or, dans ce cas même, il est aisé de voir que le produit ne pourroit avoir qu'un chiffre de plus que le multiplicande ; car si on multiplie 19, 29..., 99 par 9, on aura 171, 261..., 891, qui n'ont qu'un chiffre de plus que leurs multiplicandes respectifs. Il en seroit de même pour 199, 299..., 999 pour 1999, etc. etc. Concluons donc de là, d'abord, que chaque dividende partiel ne peut avoir qu'un chiffre de plus que le diviseur ; ensuite que, pour pouvoir donner un chiffre significatif au quotient, ce dividende doit avoir autant de chiffres que le diviseur, et dans ce cas, être au moins égal à lui ; et de plus que, dans cette derniere supposition, le quotient est 1 ; enfin, que si ce même dividende est plus petit que le diviseur, ou en général avoit moins de chiffres que lui, il ne le contiendroit pas même une fois ; ce qui indiqueroit qu'il faudroit mettre zéro au quotient.

Rien, après cela, n'est plus aisé que de déterminer le premier chiffre du quotient. Il suffira de prendre sur la gauche du dividende total, autant de chiffres qu'en a le diviseur, ou un de plus, si ceux-ci ne contenoient pas le diviseur.

101. 5°. Si l'on fait attention qua le second produit partiel a un chiffre de plus vers la droite que le premier, le troisieme un de plus que le second, etc., on verra facilement, qu'ayant trouvé le premier quotient partiel, pour trouver le second, il faudra employer un chiffre de plus vers la droite du dividende total ; et que par conséquent, il y aura autant de quotiens partiels, à la droite du premier, qu'il restoit de chiffres à droite du premier dividende partiel.

102. 6°. Et en dernier lieu. Il est évident que si du produit total, on retranche le premier produit partiel du multiplicande par le plus haut chiffre du

multiplicateur, le reste sera la somme de tous les produits partiels, hors le premier; que si, de ce reste, on retranche le second produit partiel, ce second reste sera la somme de tous les produits partiels, hors les deux premiers, etc. Donc si, ayant trouvé le premier quotient partiel, on retranche du dividende total, le produit du diviseur par ce quotient, le reste sera un nouveau dividende, qui contiendra le diviseur un nombre de fois marqué par les chiffres du quotient, hors le premier. Et si ayant trouvé le premier des chiffres restans du quotient, on soustrait encore du nouveau dividende le produit du diviseur, par ce quotient partiel, le reste sera un troisieme dividende, qui ne contiendra plus le diviseur, qu'un nombre de fois marqué par le quotient privé de ses deux premiers chiffres, etc. D'où l'on doit conclure que, lorsqu'on a trouvé le premier chiffre du quotient, il faut multiplier le diviseur par ce chiffre, et retrancher le produit du premier dividende partiel; qu'après avoir trouvé le second chiffre du quotient, il faut retrancher du second dividende partiel, le produit du diviseur, par ce second chiffre, etc.

Donc, en rassemblant tout ce que nous venons de dire, on pourra donner la regle générale suivante, pour faire la division de deux nombres quelconques l'un par l'autre.

103. Après avoir écrit le diviseur sous le dividende, et l'en avoir séparé par un trait, prenez assez de chiffres sur la gauche du dividende, pour qu'ils contiennent le diviseur; écrivez le quotient sous le diviseur; multipliez ensuite tout le diviseur par ce premier quotient partiel, et portez le produit sous le premier dividende partiel, et faites la soustraction; à côté du reste, abaissez le chiffre suivant du dividende total, et divisez le tout de nouveau,

par le diviseur ; si ce nouveau dividende partiel ne contient pas le diviseur, écrivez zéro pour second quotient, à côté du premier ; mais s'il le contient, écrivez au quotient le chiffre qui exprimera ce nouveau quotient ; et multipliant encore tout le diviseur par ce chiffre, portez le produit sous le second dividende partiel, dont vous le retrancherez, afin d'avoir un reste, qui, avec le chiffre suivant du dividende proposé, formera un troisieme dividende partiel, sur lequel vous opérerez de même ; et vous continuerez ainsi vos divisions successives, jusqu'à ce que vous ayez épuisé tous les chiffres du dividende proposé.

Pour appliquer à quelques exemples cette regle générale, nous allons diviser, l'un par l'autre, 59118858 et 8273, que nous savons devoir donner pour quotient 7146. Par là, le lecteur pourra voir que nous ne ferons que décomposer le dividende de la même maniere, mais dans un sens inverse de celui qui nous avoit servi à former le produit.

EXEMPLE I.

1ᵉ dividende partiel.	5911|8858	8273 diviseur.
	57911	7146 quotient.
2ᵉ dividende partiel.	12078	
	8273	
3ᵉ dividende partiel.	38055	
	33092	
4ᵉ dividende partiel.	49638	
	49638	
	00000	

Comme les quatre premiers chiffres sur la gauche

du dividende ne contiennent pas le diviseur, je prends les cinq premiers, et je cherche combien de fois 59118 contiennent 8273; comme je sais qu'il le contient 7 fois, j'écris 7 au quotient; ensuite je multiplie 8273 par 7; ce qui produit 57911, que je porte sous les cinq premiers chiffres 59118, qui m'ont servi de premier dividende partiel. Je soustrais ensuite 57911 de 59118; j'ai pour reste 1207, à côté desquels j'abaisse le chiffre suivant 8 du dividende. Je cherche alors combien le tout 12078 contient 8273, et comme il doit le contenir 1 fois, je mets cet 1 au quotient, à droite du 7 déjà trouvé; ensuite je multiplie tout le diviseur par 1, et le produit, 8273, je le porte sous le second dividende 12078, dont je le soustrais; le second reste est 3805 qui avec le chiffre suivant 5 du dividende, donne 38055 pour troisieme dividende partiel. Or, 38055 contient 8273,4 fois; je porte donc ce 4 au quotient, à la suite des deux chiffres 71 déjà trouvés: je multiplie le diviseur 8273 par 4, et je porte le produit 33092 sous 38055; je fais la soustraction, et le troisieme reste est 4963, qui joint au dernier chiffre 8 du dividende, donne pour quatrieme dividende partiel 49638 que nous savons contenir le diviseur 8273,6 fois; je mets donc 6 à la droite du quotient, je multiplie 8273 par 6, et portant le produit 49638 sous le quatrieme et dernier dividende partiel 49638 dont je le soustrais, le reste est zéro; d'où je conclus, ce que je savois déjà, que le dividende 59118858 contient le diviseur 8273,7146 fois sans reste.

104. Pour ne pas trop compliquer la regle, nous avons supposé, dans l'exemple ci-dessus, que l'on connoissoit chaque fois, les différens chiffres du qnotient; mais à présent supposons, ce qui arrive toujours, qu'on ne les connoisse pas: alors, à moins

d'un grand exercice, on est obligé le plus souvent à quelques tâtonnemens. Nous donnerons plus bas un moyen d'en éviter la plus grande partie. En attendant, nous allons montrer à quels signes on reconnoîtra qu'on a mis à un quotient partiel quelconque le chiffre convenable. 1°. Si ce chiffre est trop petit, on trouvera que le produit du diviseur par ce chiffre, étant retranché du dividende partiel correspondant, donnera un reste plus grand que le diviseur : il faudra donc augmenter successivement ce chiffre de 1, ou 2, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit tel, qu'étant retranché du dividende partiel, on ait un reste plus petit que le diviseur. 2°. Si le chiffre trouvé pour quotient est trop grand, le produit du diviseur par ce chiffre, sera plus grand que le dividende partiel correspondant; il faudra donc diminuer successivement ce chiffre de 1 ou 2, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit tel, qu'on puisse le retrancher du dividende partiel : alors, dans ces deux cas, on sera certain d'avoir trouvé le quotient véritable.

105. On observera encore qu'on ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient; car si on pouvoit seulement mettre 10, ce seroit une preuve que le quotient partiel précédent seroit trop foible d'une unité, puisque cette dixaine, n'étant qu'une unité par rapport à lui, lui appartiendroit nécessairement.

Proposons-nous donc maintenant de savoir à combien reviendroit par jour une armée qui coûteroit 3995655 fr. par an, ou en 365 jours. On voit que, pour résoudre la question, il faut diviser 3995655 fr. par 365, et que le quotient doit être des francs.

EXEMPLE II.

Dividende.	399|5655	365	diviseur.
	365	10947	f. quot.
2ᵉ et 3ᵉ divid. partiels.	3456		
	3285		
4ᵉ dividende partiel.	1715		
	1460		
5ᵉ dividende partiel.	2555		
	2555		
	0000		

Comme les trois premiers chiffres sur la gauche du dividende contiennent les trois chiffres du diviseur, je divise 399 par 365 pour avoir le premier quotient partiel ; or il est clair que 399 ne contient 365 que 1 fois ; je mets donc 1 pour premier chiffre du quotient : je multiplie ensuite 365 par 1, ce qui me fait 365, que je porte sous le premier dividende partiel 399. Retranchant ensuite 365 de 399, j'ai pour reste 34, à côté duquel j'abaisse le chiffre suivant 5 du dividende, et j'ai 345 pour second dividende partiel ; il faut donc que je cherche combien 345 contient 365 ; mais étant plus petit que 365, il ne le contient pas même une fois ; je mets donc 0 au quotient, et abaissant tout de suite l'autre chiffre suivant 6 du dividende, je cherche combien 3456 contient 365 : comme je ne peux pas mettre 10 au quotient, j'essaie 9 ; je multiplie donc 365 par 9, et j'ai pour produit 3285, qui peut se soustraire du dividende ; je mets donc 9 au quotient à côté du zéro, et faisant la soustraction, il me reste 171, à côté duquel j'abaisse le chiffre 5.

J'ai alors pour quatrieme dividende partiel 1715 : je cherche donc combien 1715 contient 365. On voit sans beaucoup de peine qu'il ne peut le contenir 9 fois, puisqu'en ne comptant le diviseur que pour 300, 9 fois 300 feroient 2700, qui est beaucoup plus grand que le dividende 1715: par la même raison, 1715 ne peut contenir le diviseur 365 8 fois, ni 7 fois, ni même 6 fois, puisque 8 fois 300 donnent 2400, 7 fois 300 donnent 2100, et 6 fois 300 donnênt 1800, tous plus grands que 1715; essayons donc 5; mais 5 fois 365 produisent 1825, plus grand encore que 1715. Eprouvons donc 4; or 4 fois 365 font 1460, plus petit que 1715. Le vrai quotient est donc 4; je le porte à droite du 9, et je retranche 1460 de 1715. Le reste est 255, à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 5 du dividende : ce qui me forme 2555 pour cinquieme et dernier dividende partiel : je cherche alors combien 2555 contiennent 365. D'abord je vois comme ci-dessus qu'ils ne le contiennent pas 9 fois, puisque 9 fois 300 font 2700; mais 8 fois 300 font 2400, plus petit que 2555. Essayons donc 8; mais 8 fois 365 font 2920, plus grand que 2555; éprouvons donc encore 7; or 7 fois 365 font précisément 2555; donc le quotient véritable est 7, et il ne reste rien. Le quotient total est donc 10747 francs. Donc cette armée coûteroit 10947 francs par jour.

106. On a vu, dans l'exemple précédent, sur-tout au quatrieme dividende partiel, qu'on avoit abrégé de beaucoup, et le nombre des épreuves nécessaires pour trouver le vrai quotient, et la longueur des calculs, en cherchant, non combien ce dividende 1715 contenoit tout le diviseur 365, mais combien il contenoit les 3 centaines séulement de ce diviseur. Il seroit encore plus court de ne comparer entr'elles que les centaines du dividende et du diviseur, et de

chercher seulement combien les 17 centaines du dividende contiennent les 3 centaines du diviseur, ou même combien 17 contient 3, abstraction faite des centaines, puisque 17 centaines contiennent 3 centaines, de la même maniere que 17 contient 3.

Ainsi, dorénavant, nous chercherons seulement, dans chaque division partielle, combien le premier ou les deux premiers chiffres du dividende, considérés comme des unités simples, contiennent le premier chiffre du diviseur, envisagé de même. Mais on pourroit demander si, en négligeant tous les chiffres restans du dividende et du diviseur, on n'auroit pas à craindre de se tromper sur le quotient. Non; car la multiplication et la soustraction qui suivent ce quotient, redresseront ce qu'il pourra avoir de défectueux; puisque, s'il est trop grand, on aura un produit, qui ne pourra se retrancher du diviseur, et que, s'il est trop petit, il restera un nombre plus grand que le diviseur.

107. Il est même beaucoup de cas, où l'on peut diminuer encore le nombre des épreuves; c'est lorsque le second chiffre du diviseur est plus grand que 5, sur-tout s'il est un 7, un 8, ou un 9. Car alors, au lieu de chercher combien le premier ou les deux premiers chiffres du dividende contiennent le premier chiffre du diviseur, l'on approchera davantage du vrai quotient, en cherchant combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le premier chiffre du diviseur, augmenté de l'unité; la raison de ce procédé est bien simple; car, en supposant par exemple, que le diviseur total soit 396, on approchera plus du vrai quotient, en cherchant combien le premier ou les deux premiers chiffres de chaque dividende partiel contiennent 4 centaines, qu'en cherchant combien ils en contiennent 3, puisque 396 est bien plus près de 400 que de 300.

Supposons donc qu'on ait 11032 à diviser par 197.

EXEMPLE III.

11032	197
985	56
1182	
1182	
0000	

au lieu de dire: en 11 combien de fois 1, ce qui me donneroit successivement 9, 8, 7, et 6, qui feroient quatre faux quotiens, je dis: en 11 combien de fois 2, en augmentant le premier chiffre 1 du diviseur d'une unité; j'ai tout de suite pour quotient 5, qui est le véritable, puisque 5 fois 197 donnent 985, qui, retranchés du dividende 1103, donnent pour reste 118, plus petit que le diviseur; alors, à côté de 188, j'abaisse 2, et je dis: en 11 combien de fois 2? le quotient est entre 5 et 6. Je choisis 6, et multipliant 197 par 6, j'ai 1182, qui, retranchés de 1182, donnent pour reste zéro. J'ai choisi le quotient 6 plutôt que 5 par deux raisons; la premiere et la principale, est que regardant 197 comme s'il étoit 200, le diviseur est un peu trop fort, et par conséquent le quotient 5 un peu trop foible: la seconde, parce que regardant 1182 comme 1100, le dividende est un peu trop foible, et que par conséquent le quotient 5 l'est aussi; donc il faut doublement choisir 6, et non pas 5.

108. On vient d'abréger les épreuves; on peut aussi abréger les calculs; et cela, en soustrayant à fur et à mesure chaque chiffre des produits, du chiffre correspondant des dividendes partiels, au lieu d'écrire ces produits tout entiers sous ces dividendes, et de les soustraire ensuite: ce qui se fera.

d'une maniere analogue à celle qu'on a donnée pour la soustraction (47). Pour faire mieux entendre cette opération, reprenons l'exemple précédent.

11032	197
1182	56
0000	

Après avoir trouvé le premier quotient 5, au lieu de multiplier 197 par 5, et de retrancher le produit 985 de 1103, je dis, en multipliant d'abord par 5 les unités 7 du diviseur, 5 fois 7 font 35. Comme je ne puis ôter 35 des unités 8 du dividende, je leur ajoute 4 dixaines que j'emprunte sur le chiffre des dixaines; alors j'ai 43, dont je puis ôter 35, et il me reste 8, que j'écris sous le 3. Quant aux 4 dixaines, au lieu de diminuer de 4 le chiffre des dixaines du dividende, je les ajoute au produit du chiffre 9 des dixaines du diviseur par 5, ce qui revient au même (47), et je dis donc: 5 fois 9 font 45, et 4 font 49, que je ne puis ôter de 0; mais j'emprunte sur le chiffre à gauche, assez de dixaines, pour que la soustraction soit possible; c'est-à-dire 5, qui, joint à zéro, fait 50; dont ôtant 49, j'ai pour reste 1, que j'écris sous le zéro, et je retiens les 5 pour les ajouter au produit suivant 5 de 1 par 5, ce qui me donne 10, que j'ôte de 11, et j'ai pour reste 1, que j'écris sous le premier 1, à droite. Le reste est donc 118, comme on l'avoit déjà trouvé. Pour trouver le second reste, on dira en multipliant le diviseur par le second quotient 6: 6 fois 7 font 42, qui, ôtés de 42, donnent 0 pour reste, et 4 à retenir: 6 fois 9 font 54, et 4 de retenu font 58, qui, ôtés de 58, donnent encore 0 pour reste, et 5 à retenir: enfin, 6 fois 1 font 6 et 5 font 11, qui ôtés de 11, donnent encore zéro juste pour reste.

Si le quotient trouvé étoit faux, on s'en appercevroit encore par cette maniere; car s'il étoit trop foible, le reste seroit plus grand que le diviseur, ou du moins lui seroit égal; et s'il étoit trop fort, le produit des plus hautes unités du diviseur par ce quotient, joint aux unités retenues, seroit plus grand que le plus haut ou les deux plus hauts chiffres du dividende. Ainsi si l'on avoit pris pour premier quotient 6 dans l'exemple précédent, on auroit dit: 6 fois 7 font 42; de 43 reste 1, et je retiens 4; 6 fois 9 font 54, et 4 font 58; de 60 reste 2, et je retiens 6: 6 fois 1 font 6 et 6 font 12, qui ne peuvent se retrancher des deux derniers chiffres 11; 6 est donc trop fort: au contraire, si on eût mis 5 pour second quotient, on eût dit: 5 fois 7 font 35; de 42, reste 7, et je retiens 4; 5 fois 9 font 45 et 4 font 49; de 58, reste 9 et je retiens 5; enfin, 5 fois 1 font 5, et 5, font 10, de 11 reste 1; le reste total seroit donc 197, qui, étant précisément égal au diviseur, indiqueroit que le quotient est trop foible d'une unité.

109. Si les deux premiers chiffres du diviseur étoient 11 ou 12, alors on diviseroit les deux ou trois premiers chiffres de chaque dividende partiel par ces deux chiffres, comme s'il s'agissoit d'un nombre simple; et si, par hasard, l'un des quotiens partiels se trouvoit être aussi 11 ou 12, on les mettroit au quotient total, ce qui abrégeroit l'opération.

EXEMPLE IV.

1255448	1129
13548	1112
00000	

Je devrois dire: en 12, combien de fois 11? une fois

fois : mais je vois qu'il reste 1, qui, joint au chiffre suivant 5, fait 15 qui contient 11 encore une fois: je dirai donc : en 125 combien de fois 11? 11 fois que je mets au quotient : puis, 11 fois 9 font 99, qui, ôtés de 104, donnent 5 de reste, et je retiens 10; 11 fois 2 font 22, et 10 de retenu font 32, qui, ôtés de 35, donnent 3 de reste, et je retiens 3 : enfin, 11 fois 11 font 121, et 3 font 124; de 125, il reste 1. Je dis ensuite : en 13 combien de fois 11? une fois; mais il reste 2 qui, joints à 5, font 25, dans lesquels 11 est contenu 2 fois: je mettrai donc 12 au quotient, et je dirai : 12 fois 9 font 108; de 108, reste 0, et je retiens 10 : 12 fois 2 font 24; et 10 de retenu, font 34; de 34 reste 0, et je retiens 3; enfin, 12 fois 11 font 132, et 3 font 135; de 135 reste zéro. Pour exercer les commençans, sur la pratique de cette regle, nous en laisserons quelques exemples, après avoir examiné encore deux cas particuliers de la division.

110. Il pourroit arriver que le dividende et le diviseur fussent tous deux terminés par des zéros : alors on peut simplifier l'opération, en ôtant tous les zéros de celui des deux qui en a le moins, et en supprimant un égal nombre de ces zéros sur la droite de celui qui en a le plus. Si j'avois, par exemple, 80 à diviser par 40, j'ôterois un 0 de part et d'autre, et je n'aurois plus à diviser que 8 par 4. La raison de ce procédé est fort simple; car il est évident que 80 et 40 sont 8 dixaines et 4 dixaines, et que 8 dixaines contiennent 4 dixaines, comme 8 unités contiennent 4 unités. De même, si j'avois 400 à diviser par 50, je supprimerois un zéro de part et d'autre, et j'aurois 40 à diviser par 5; ce qui donneroit 8, qui est le même quotient qu'on trouveroit, en divisant 40 dixaines par 5 dixaines.

111. Dans toutes les divisions que nous nous

sommes proposées jusqu'à présent, nous avons toujours trouvé un quotient exact. S'il y avoit un reste, on feroit toute la division, et, dans tous les cas, comme on l'a faite jusqu'à présent : seulement, à la fin, on écriroit le reste à côté du quotient, et au-dessus du diviseur, dont on le sépareroit par un trait. Supposons, par exemple, qu'on eût à diviser l'un par l'autre, les deux nombres suivans.

EXEMPLE V.

59124757	8273
12137	7146 $\frac{5899}{8273}$
38645	
55537	
5899	

Après avoir fait l'opération, comme à l'ordinaire, on eût trouvé 7146 pour quotient, avec un reste 5899. Le quotient total eût donc été 7146. $\frac{5899}{8273}$. Ce qui d'ailleurs paroîtra évident, si l'on observe que cet exemple n'est que l'exemple I (105) où, avec le même diviseur 8273, le dividende actuel n'est autre chose que le premier 59118858, augmenté de 5899. Or, 59118858 contenoit 8273, 7146 fois justes; donc le nouveau dividende le contient 7146 fois avec le reste 5899, qui étant plus petit que le diviseur, ne peut le contenir une fois seulement de plus.

Il ne nous reste plus, après avoir parcouru les différens cas de la division, que de laisser des exemples de chacun de ces cas, pour familiariser les commençans avec cette regle.

EXEMPLES

I.

Divid. 57552	132 div.
475	436 quot.
792	
000	

II.

Divid. 153344	599 div.
3354	256 quot.
3594	
0000	

III.

Divid. 386259 { 597 div.
2805 { 647 quot.
4179
0000

IV.

Divid. 865368 { 153 div.
1003 { 5656 quot.
856
918
000

V.

Dividende.. 52344 { 600 diviseur.
4344 { 87 $\frac{144}{600}$ quotient.
144

VI.

Dividende.. 332466770 { 3645 diviseur.
44167 { 91211 $\frac{2675}{3645}$ quotient.
42770
2675

VII.

Divid. 18|000 { 1|000 div.
{ 18 quot.

VIII.

Divid. 840|00 { 12|00 div.
{ 70 quot.

Nous allons finir cet article, par quelques observations sur les exemples précédens, que nous avons un peu multipliés par deux raisons; la premiere, pour habituer les éleves à résoudre le problême de la division, dans les différens cas que nous avons présentés; et la seconde, parce que presque tous ces exemples nous serviront bientôt à un autre usage. Quant aux exemples mêmes, nous remarquerons,

1°. Que nous nous sommes servis, pour trouver chaque quotient partiel dans les exemples II et III, de la méthode de l'article 107, et pour chaque sous-

traction partielle, dans tous les exemples, de celle insérée dans l'article 108 ;

Et 2°. que dans l'exemple VI, pour trouver d'un seul quotient les deux chiffres 12 et 11, nous avons abaissé d'abord les deux chiffres 67 du dividende à côté du premier reste 441, et ensuite les deux chiffres 70 à côté du second reste 427.

Méthodes abrégées pour la division des nombres entiers.

112. I. Nous avons vu que le nombre des épreuves qu'il falloit faire, pour s'assurer du véritable quotient, étoit ce qu'il y avoit de plus long dans la pratique de la division. De plus, nous avons observé que le second chiffre du diviseur, par le plus ou le moins d'unités, que le produit de ce chiffre par le quotient, faisoit refluer sur le produit du premier chiffre par ce même quotient, étoit la premiere cause de ces tâtonnemens ; enfin (107) nous avons appris à restreindre le nombre des épreuves, quand le second chiffre étoit un 7, ou un 8, ou un 9. Pour ne rien laisser à desirer sur cet article, nous allons voir ce qu'il faut faire dans les cas où ce chiffre n'est ni un 7, ni un 8, ni un 9.

Et d'abord, si c'est un 0, ou un 1, ou un 2, ou un 3, il faudra simplement diviser à l'ordinaire le premier ou les deux premiers chiffres du dividende, par le premier chiffre du diviseur, tel qu'il est. Mais s'il est un 4, ou un 5, ou un 6, alors on divisera d'abord comme il vient d'être dit, et ensuite on divisera par le premier chiffre du diviseur, augmenté de l'unité (en négligeant les restes dans ces deux divisions) : puis ajoutant les deux quo-

tiens ; on en prendra la moitié, qui ne différera presque jamais de plus d'une unité du vrai quotient. Un exemple suffira pour entendre et la regle et la raison de cette regle. Supposons donc, exemple IV, qu'on ait à diviser 865368 par 153, on dira : en 8 combien de fois 1 ? 8 fois : ensuite en 8 combien de fois 2 ? 4 fois ; alors ajoutant 8 et 4, on aura 12, dont la moitié 6 sera, à 1 près, le vrai quotient, au lieu que, par les méthodes ordinaires, on eût eu successivement les trois faux quotiens 8, 7 et 6. En opérant de même sur le second dividende partiel 1003, on diroit : 10 contient 10 fois 1, et 5 fois 2 : puis 10 et 5 font 15, dont la moitié 7 ne differe du vrai quotient 6 que de 1 ; ce qui épargne les faux quotiens 9 et 8 qu'on eût trouvés par les regles usitées. On sentira aisément la raison des opérations ci-dessus, si l'on observe, 1°. que 153 étant à peu près le milieu entre 1 et 2 centaines, le vrai quotient doit-être aussi à peu près entre ceux qu'on trouve, en cherchant combien les centaines du dividende contiennent la centaine, ou les 2 centaines du diviseur ; et 2°. que le milieu entre les deux premiers quotiens, par exemple 8 et 4, est évidemment 6, qu'on trouve de même en prenant la moitié de 8 plus 4.

113. D'après toutes ces observations et toutes ces regles, il sera fort rare qu'on puisse se tromper sur le vrai quotient de deux unités. Mais pour porter, dans tous les cas, l'abrégé de la regle, aussi loin qu'il est possible, au lieu de soustraire (108) chaque produit partiel, en commençant par la droite, on commencera par la gauche. Ainsi, après avoir trouvé 6 pour le premier quotient, je dirois, en multipliant 153 par 6, mais en commençant par la gauche : 6 fois 1 font 6, qui ôtés de 8, premier chiffre à gauche de 865, donnent 2 pour reste ; puis 6 fois 5 font 30,

qui ne peuvent s'ôter de 26, formé du 2 restant, joint au chiffre suivant 6 du dividende : le quotient 6 est donc trop fort. On se conduiroit de même pour vérifier l'autre quotient 7. Et l'on voit que cette méthode élague une partie du produit et du reste qu'on étoit obligé de trouver à chaque épreuve.

114. II. Si le diviseur seul étoit terminé par des zéros, on sépareroit, sur la droite du dividende, autant de chiffres qu'il y auroit de zéros dans le diviseur ; on diviseroit ensuite les chiffres à gauche du dividende, par les chiffres significatifs du diviseur ; enfin, joignant le reste de cette division aux chiffres séparés du dividende, on le regarderoit comme le reste final de la division proposée ; c'est-à-dire, qu'on l'écriroit à la suite du quotient, et au-dessus du diviseur. Ainsi, pour diviser (Ex. V) 52344 par 600, je séparerois les deux chiffres 44 sur la droite du dividende, parce qu'il y a deux zéros au diviseur ; je prendrois ensuite le sixieme des chiffres 523 qui restent à gauche, et ayant trouvé 87 pour quotient, et 1 de reste, je joindrois cet 1 aux chiffres séparés 44, et j'écrirois le tout, 144, à côté de 87, et au-dessus de 600.

La raison de cette regle est bien simple : en effet, le dividende 52344 peut être décomposé en 52200 plus 144 : or 52200 divisé par 600, ou (110) 522 divisé par 6, donne 87 : il reste donc 144 à diviser par 600 ou $\frac{144}{600}$.

115. III. Si le diviseur pouvoit se décomposer en deux facteurs, alors il seroit plus court de diviser successivement par ces facteurs. Ainsi, supposons que le diviseur soit 63 ; comme ce nombre est le produit de 7 par 9, je divise d'abord par 7, et ensuite je divise le premier quotient par 9, et le

second quotient est celui qu'on cherche. En effet, en divisant d'abord par 7, j'ai divisé par un nombre 9 fois trop petit, puisque 7 n'est que le neuvieme de 63, par lequel il falloit diviser : le quotient est donc 9 fois trop grand. Il faut donc, pour le rendre à sa juste valeur, en prendre le neuvieme. Pour appliquer cette abréviation à un exemple, soit (Ex. I) 57552 à diviser par 132 : comme 132 est le produit de 12 par 11, je prends d'abord le douzieme de 57552, ce qui donne 4796, dont le onzieme est 436 ; c'est-à-dire, le même quotient qu'on avoit déjà trouvé.

Il en seroit de même, si le diviseur pouvoit se décomposer en trois ou quatre, etc. facteurs. Prenons pour exemple, l'exemple VI ci-dessus, où l'on a vu que le dividende 332466770 contenoit le diviseur 3645, 91211 fois avec un reste 2675 ; d'où il suit que le dividende, diminué de ce reste, ou 332464095 contient 91211 fois justes le diviseur 3645. Or ce diviseur n'est autre chose que le produit des quatre facteurs simples 9, 9, 9 et 5. Je prends donc, 1°. le neuvieme de 332464095 qui est 36940455; 2°. le neuvieme de 36940455 ou 4104495; 3°. le neuvieme de 4104495 ou 456055; enfin le cinquieme de ce troisieme quotient, et j'ai en effet 91211.

116. S'il se trouvoit un reste dans ces divisions successives, on n'y feroit pas d'abord attention ; c'est-à-dire, qu'on chercheroit les quotiens successifs, comme s'il n'y avoit pas de reste ; mais à la fin, pour avoir le reste total, on se conduiroit de la maniere suivante : on multiplieroit le dernier reste par le diviseur précédent, et au produit on ajouteroit le reste précédent : ensuite on multiplieroit cette somme par le troisieme diviseur en remontant, et au produit on ajouteroit le reste provenu de cette division, et ainsi de suite. Ainsi, suppo-

4104528 $\frac{2}{81}$ est 456058 avec le reste 6 $\frac{2}{81}$ ou $\frac{488}{81}$ dont le neuvieme est $\frac{488}{729}$; enfin le cinquieme de 456058 $\frac{488}{729}$, est 91211 avec le reste 3 $\frac{488}{729}$, qui vaut $\frac{2675}{729}$, dont le cinquieme est $\frac{2675}{3645}$.

117. IV. On a vu (71) que, lorsqu'on avoit à multiplier un nombre par 5, ou par 25, ou par 125, ou par 625, ou par 3125, etc. il falloit mettre à la suite de ce nombre 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, etc. zéros, et prendre ensuite la moitié, ou le quart, ou le huitieme, ou le seizieme, ou le trente-deuxieme, etc. du produit; donc, réciproquement, pour diviser un nombre par 5, ou par 25, ou par 125, ou par, etc. il faut doubler, ou quadrupler, ou octupler, ou, etc. ce nombre, et ensuite séparer sur la droite par une virgule un, ou deux, ou trois, etc. chiffres. Si j'avois donc 375 à diviser par 25, je prendrois d'abord quatre fois 375, ce qui me donneroit 1500, et séparant deux chiffres, je trouverois 15 pour quotient. Si j'avois encore (71) 1546428125 à diviser par 3125, je multiplierois ce nombre par 32, en le multipliant d'abord par 4, ce qui donneroit 6185712500, et ensuite ce dernier nombre par 8, ce qui produiroit 49485700000, et enfin séparant cinq chiffres sur la droite de ce produit, j'aurois pour le quotient cherché 494857.

118. V. Nous allons terminer cette matiere, en donnant une regle générale, pour trouver, à moins d'une unité près, le quotient de deux nombres quelconques. Quant à la démonstration, nous la donnerons à la suite des regles abrégées qui concernent les nombres décimaux, regles dont on verra que celle-ci n'est, à proprement parler, qu'une espece d'extension. Voici la regle dont il s'agit.

Supprimez sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il s'en trouve dans le diviseur. Alors, ou les chiffres restans du dividende

contiendront le diviseur, ou ils ne le contiendront pas. Dans le premier cas, divisez comme à l'ordinaire, ce qui donnera un nombre indéfini de chiffres au quotient; dans le second, le quotient n'aura qu'un chiffre, que vous trouverez, en supprimant assez de chiffres sur la droite du diviseur, pour que le reste à gauche soit contenu dans le dividende. Ensuite, dans les deux cas, continuez à diviser, non par le même diviseur, mais par ce diviseur dont vous aurez successivement supprimé le premier, les deux premiers, etc. chiffres vers la droite, jusqu'à ce qu'ils soient tous épuisés; enfin ayez soin, dans toutes ces suppressions, d'augmenter d'une unité le premier des chiffres restans à droite, si le chiffre supprimé, ou le premier des chiffres supprimés est plus grand que 5, ou même égal à 5. Pour appliquer cette regle à un exemple, proposons-nous de trouver le quotient de 332466770 par 91211, à moins d'une unité près. On a vu (111) que ce quotient étoit 3645 avec le reste 2675. Voyons donc si, au reste près, nous trouverons le même quotient 3645. Je commence à poser pour dividende 33246 seulement, en supprimant les quatre derniers chiffres 6770, parce que le diviseur a cinq chiffres; j'écris ensuite 33247 et non 33246, parce que le premier 6 des chiffres supprimés 6770 est plus grand que 5. Je vois ensuite que le diviseur 91211 ne peut être contenu dans le dividende restant 33247. Je supprime donc le chiffre 1 du diviseur, afin qu'il puisse être contenu dans le dividende. J'ai donc

Dividende..	33247	9121 diviseur.
	5884	3645 quotient.
	412	
	48	
	3	

divisant alors, comme à l'ordinaire, 33247 par 9121, j'ai 3 pour quotient, et pour reste 5884 que je ne puis diviser par 9121. Je supprime donc le 1 à droite, et divisant 5884 par 912, j'ai 6 pour quotient, et pour reste 412 que je divise par 91 seulement, ce qui me donne 4 au quotient, et le reste 48 qui, enfin divisé par 9, donne 5 au quotient et un reste 3: le quotient total est donc 3645 comme ci-dessus.

119. Telle est la regle que propose Bézout dans son arithmétique; mais il faut le dire, et il en convient lui-même, elle peut, dans certains cas, être fautive de plusieurs unités. Nous allons en donner deux exemples différens; nous assignerons ensuite la cause de ces erreurs; et enfin nous exposerons une regle, qui n'est pas sujette à cet inconvénient.

Et d'abord, si l'on multiplie un même nombre 36427, par exemple, d'un côté par 14444 et de l'autre par 16666; on trouvera pour produits 526151588 et 607092382. Divisons maintenant ces deux produits respectivement par 14444 et par 16666, comme on le voit ci-dessous, et comme la regle le prescrit.

52615	14444	60709	16666
9283	36431	10711	36423
619		709	
.43		41	
1		7	
		1	

Et nous trouverons au lieu du vrai quotient 36427, les deux quotiens 36431 et 36423, le premier trop fort, et le second trop foible de 4 unités. Quant à la cause de ces erreurs, elle est facile à saisir; en

effet, dans le premier cas, où, à chaque division partielle, on ne tient aucun compte du chiffre qu'on supprime, chaque diviseur partiel est trop foible; chaque quotient partiel, et par conséquent le quotient total est trop fort : dans le second cas, au contraire, où l'on augmente sans cesse d'une unité le dernier chiffre de chaque diviseur partiel, chacun d'eux est trop fort; donc chaque quotient partiel, et par conséquent le quotient total est trop foible. Le moyen d'obvier à ces erreurs est aussi simple que facile; car il suffit, en opérant d'ailleurs absolument comme la regle le prescrit, de tenir compte, à chaque produit partiel, des dixaines que donnera le produit du chiffre supprimé par le quotient actuel, au lieu d'ajouter une unité au dernier chiffre à droite du diviseur, quand ce chiffre supprimé est 5 ou plus grand que 5. Reprenons donc les deux exemples ci-dessus.

52615	14444	60709	16666
9283	36427	10711	36427
617		711	
39		45	
10		12	
0		0	

en opérant sur le premier, je divise d'abord à l'ordinaire 52615 par 14444; j'ai pour quotient 3, et pour reste 9283, qu'il faut diviser par 1444; le quotient est 6; alors je multiplie par 6 le 4 supprimé, ce qui fait 24, dont j'ajoute les 2 dixaines au produit 24 du dernier 4 à droite de 1444 par 6; j'ai donc 26 qui, ôtés de 33, donnent 7 pour reste; soustrayant ensuite à l'ordinaire, j'ai pour second reste 617 que je divise par 144; le quotient est 4, par lequel je multiplie le chiffre séparé 4; le produit est 16, plus près de 2 dixaines que de 1; je retiens

donc ces deux dixaines, pour les ajouter au produit de 144 par 4. J'ai en tout 578 qui, ôtés de 617, donnent le troisieme reste 39; je le divise par 14; le quotient est 2; je multiplie le chiffre supprimé 4 par 2 et j'ai 8, plus près de 1 dixaine que de 0 dixaine. Je retiens donc 1, que j'ajoute à 28, produit de 14 par 2; retranchant alors 29 de 39, j'ai pour dernier reste 10, que je divise par 1. Il sembleroit que le quotient seroit 9; mais il n'est pas même 8; car en multipliant le chiffre supprimé 4 par 8, j'ai 32, dont les 3 dixaines, ajoutées au produit 8 du diviseur 1 par le quotient 8, donnent 11, plus grand que 10. Je mets donc 7 au quotient, et ajoutant au produit 7 du diviseur 1 par le quotient 7, les 3 dixaines du produit 28 (plus voisin de 3 dixaines que de 2) du chiffre supprimé 4 par le même quotient 7, j'ai 10 qui, ôtés de 10, laissent 0 pour reste. Cette explication suffit pour faire entendre le second exemple.

Comme cette regle est principalement utile, lorsque le dividende et le diviseur sont des nombres considérables, nous allons finir par un exemple de cette nature. Soit donc proposé de trouver, à moins d'une unité près, le quotient de 545987653219467532 par 939674215792. Voici les deux divisions faites par la regle ordinaire, et par la regle abrégée.

Regle ordinaire.

545987653219467532	939674215792
7615054532346	581039
976608060107	
3693384431553	
8743617841772	
286549899644	

Règle abrégée.

```
5459877 { 9396742
 761506 { 581039
   9767
    370
     88
      4
```

De la division des décimales et des nouvelles unités.

120. Avant de traiter de la division des décimales, nous allons exposer un principe, qui non-seulement nous sera utile pour ce sujet, mais encore pour la suite.

Si on multiplie un dividende ou un diviseur par un nombre quelconque, le quotient deviendra le même nombre de fois trop grand ou trop petit. Supposons, par exemple, qu'ayant trouvé 9 pour le quotient de la division de 36 par 4; on multiplie par 3 le dividende 36, et qu'on divise le produit 108 par 4, le nouveau quotient 27 sera 3 fois trop grand; et il est aisé de voir que cela doit être : car le quotient de 108 par 4 est le même que celui de 36 par 4, plus celui de 36 par 4, plus enfin celui de 36 par 4; or ces quotiens sont évidemment égaux; donc leur somme est le triple de l'un d'eux. Si c'eût été le diviseur 4 qu'on eût multiplié par 3, on auroit eu 36 à diviser par 12, ce qui eût donné pour quotient 3, qui est 3 fois trop petit. Car, diviser 36 par 12, revient à diviser 36 par 4, ce qui donne 9, et à diviser ensuite ce quotient par 3, ce qui donne 3, c'est-à-dire, à prendre le tiers du quotient de la division de 36 par 4.

121. Si l'on divise un dividende ou un diviseur par un nombre quelconque, le quotient deviendra le même nombre de fois trop petit ou trop grand. Supposons, par exemple, qu'ayant divisé 108 par 9, on ait trouvé pour quotient 12; si on divise à présent le dividende 108 par le nombre 3, on aura 36, et ce nouveau dividende ne contiendra plus le diviseur 9 que 4 fois; le quotient est donc devenu trois fois trop petit; ce qui est évident, puisque le dividende 108 peut se décomposer en trois dividendes égaux à 36. Si au contraire, c'eût été le diviseur 9 qu'on eût divisé par 3, on auroit eu pour nouveau diviseur 3; et 108 divisé par 3, eût donné pour quotient 36, qui est trois fois trop grand, puisque diviser 108 par 9, revient à diviser deux fois de suite 108 par 3, c'est-à-dire à prendre le tiers du quotient de 108 par 3.

122. On peut donc conclure delà, qu'on peut multiplier ou diviser le dividende et le diviseur d'une division par un même nombre, sans altérer la valeur du quotient; car si, d'un côté, il devient un certain nombre de fois trop grand ou trop petit, de l'autre, il sera rendu le même nombre de fois trop petit ou trop grand.

Cela posé, passons à la division des nombres décimaux.

Il peut se présenter trois cas, selon que le dividende, ou le diviseur, ou tous les deux contiennent des chiffres décimaux.

123. 1°. Si le dividende seul contient des chiffres décimaux, on divisera comme s'il exprimoit des entiers; mais on séparera par une virgule sur la droite du quotient autant de chiffres décimaux, qu'il s'en trouvoit dans le dividende. Supposons, par exemple, qu'on ait à diviser 21,44 par 16, je divise 2144 par 16, comme s'il s'agissoit de 2144

unités entieres; mais, après avoir trouvé le quotient 134, je sépare les deux chiffres 34 par une virgule, ce qui me donne pour le quotient cherché 1,34. Voici la raison de cette regle : en regardant le dividende comme étant 2144, je l'ai rendu cent fois trop grand; le quotient est donc (120) cent fois trop grand. Il faut donc le compter pour des centiemes.

Si le quotient n'avoit pas assez de chiffres pour séparer les chiffres prescrits par la regle, on y suppléeroit par des zéros, placés à gauche de ce quotient : si j'avois eu, par exemple, 0,02144 à diviser par 16, le quotient eût été encore 134, dont il faudroit séparer cinq chiffres par la virgule, puisqu'en écrivant 2144 au lieu de 0,02144 j'ai rendu le dividende, et par conséquent le quotient cent mille fois trop grand. Il faut donc ajouter deux zéros sur la gauche de 134, et écrire 0,00134. On peut s'exercer sur les exemples suivans :

I.		II.		III.	
3,339	9	324,48	78	0,03268	172
	0,371	124	4,16	1548	0,00019
		468		0000	
		000			

124. 2°. Si le diviseur seul contient des chiffres décimaux, on divisera encore comme s'il étoit un nombre entier; mais on mettra à la suite du quotient, autant de zéros qu'il se trouvoit de chiffres décimaux au diviseur. Soit, par exemple, 36 à diviser par 1, 2; on divisera 36 par 12, ce qui donnera pour quotient 3, auquel on ajoutera un zéro, et l'on aura 30 pour le quotient cherché. En effet, en divisant par 12, on a rendu le diviseur 10 fois trop grand, et par conséquent (120) le quotient 10 fois trop

trop petit ; donc, pour le rendre à sa juste valeur, il faut le multiplier par 10, ce qu'on fait en lui ajoutant un zéro. Cela suffit pour trouver les quotiens suivans :

132	0,11	20790	0,00315	1	0,001
000	1200	1890	6600000	0	1000
		0000			

125. 3°. Si le dividende et le diviseur renfermoient tous deux des chiffres décimaux, il pourroit se présenter trois cas ; d'abord celui où le dividende en auroit plus que le diviseur ; ensuite celui où ils en auroient tous deux également ; et enfin celui où le dividende en auroit moins que le diviseur. Dans les trois cas, on divisera comme si les deux nombres étoient des entiers ; mais, pour le premier cas, on séparera par une virgule, autant de chiffres sur la droite du quotient, que le dividende a de chiffres décimaux de plus que le diviseur ; dans le second, on laissera le quotient tel qu'il est ; et dans le troisieme, on lui ajoutera autant de zéros que le diviseur a de chiffres décimaux de plus que le dividende. Voici les trois cas :

5,796	3,6	57,96	0,36	579,6	0,0036
219	1,61	219	161	219	161000
36		36		36	
00		00		00	

et voici la raison de la regle : en divisant partout comme si l'on avoit des nombres entiers, dans le premier cas, l'on a multiplié le dividende par 1000 et le diviseur par 10 : le quotient est donc (120) d'un côté mille fois trop grand, et de l'autre dix fois trop petit, c'est-à-dire, en tout cent fois trop

grand ; il a donc fallu ne le compter que pour des centiemes. Dans le second cas, on a également multiplié par cent le dividende et le diviseur ; donc (122) le quotient n'est pas altéré : enfin, dans le troisieme cas, on a multiplié le dividende par dix, et le diviseur par dix mille ; le quotient étoit donc d'un côté (121) dix fois trop grand, et de l'autre dix mille fois trop petit, c'est-à-dire, en tout mille fois trop petit ; il a donc fallu lui ajouter trois zéros, pour le rendre à sa juste valeur.

126. Au reste, ce n'a été que pour suivre la même marche que nous avions adoptée pour la multiplication des décimales, que nous avons parlé des divisions et subdivisions ci-dessus ; car il ne seroit pas difficile de trouver une regle qui embrassât à-la-fois tous les cas. Prenons pour cela un des exemples ci-dessus 579,6 et 0,0036 : on sait (31) que 579,6 est la même chose que 579,6000. Or le dividende et le diviseur étant alors tous deux des dix milliemes, doivent se contenir comme s'ils étoient des entiers. On voit donc, en raisonnant de même pour tout autre cas, que, pour diviser des nombres décimaux, il faut d'abord rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans ces nombres, et ensuite diviser comme s'ils étoient des nombres entiers.

Ainsi au lieu de 132 et de 0,11 j'écrirois 132,00 et 0,11, et ensuite, ôtant la virgule, je diviserois 13200 par 11, ce qui me donneroit pour quotient 1200 comme ci-dessus.

127. Si on avoit eu 5,796 à diviser par 3,6, on eût d'abord écrit 5,796 et 3,600 : ensuite divisant 5796 par 3600 on auroit eu 1 pour quotient, et pour reste 2196. Le quotient eût donc été $1 \frac{2196}{3600}$; mais, quand on se sert des décimales, c'est pour avoir

aussi le quotient avec des chiffres décimaux, et non avec un reste de la forme ci dessus. Pour savoir ce qu'il convient de faire dans ce cas, et tout autre semblable, j'observe que si j'eusse mis d'abord à la suite du dividende 5796 ou 1, ou 2, ou 3 zéros, etc. ce qui eût été multiplier ce dividende par 10, ou 100, ou 1000, etc. j'aurois eu un quotient 10, ou 100, ou 1000, etc. fois trop grand, et que par conséquent il eût fallu compter comme des dixiemes, ou des centiemes, ou des milliemes, etc. d'où je conclus que pour avoir un certain nombre de chiffres décimaux au quotient, il faut ajouter à la suite du dividende un égal nombre de zéros. Ainsi dans le cas précédent, si je veux avoir des centiemes au quotient, à la suite du dividende 5796 je mets 2 zéros, et divisant 579600 par 3600, j'ai pour quotient 161 que je compte pour des centiemes, en écrivant 1,61. Au lieu de diviser 579600 par 3600, on peut (110) diviser, ce qui est plus court, 5796 par 36, ce qui donne encore 161.

128. Si l'on avoit à diviser 0,3 par 0,4 en suivant la regle, on auroit à diviser 3 par 4; il en seroit de même s'il falloit diviser 0,05 par 0,08; car cela reviendroit à diviser 5 par 8. Comment exprimer le quotient dans ce cas, et dans tous les autres semblables, où le dividende est plus petit que le diviseur? comme on l'a fait jusqu'à présent, c'est-à-dire, qu'il est pour le premier cas 0 plus le reste $\frac{3}{4}$, et dans le second 0 plus le reste $\frac{5}{8}$. Alors si l'on veut avoir des chiffres décimaux aux quotiens, qui, comme on le voit, ne doivent pas contenir d'entiers, on se servira de la regle ci dessus. Veut-on, par exemple, exprimer $\frac{3}{4}$ en centiemes? on mettra 2 zéros à la suite de 3, et divisant 300 par 4, on aura 75, et par conséquent 0,75 pour le quotient cherché. Si l'on vouloit avoir, avec trois chiffres

décimaux, le quotient de $\frac{5}{8}$, on diviseroit 5000 par 8; ce qui donneroit 625, et par conséquent 0,625 pour le quotient cherché. Nous reviendrons bientôt sur ce sujet.

129. Il ne nous reste plus qu'à appliquer ces regles à des exemples tirés des nouvelles unités. On a vu (83) qu'à raison de $9^{f.},55$ le metre, $54^{mt.},925$ avoient coûté $524^{f.},53375$. Donc, puisqu'un produit divisé par un de ses facteurs donne pour quotient l'autre facteur (89), si l'on divise $524^{f.},53375$ par $9^{f.},55$, on doit trouver pour quotient $54^{mt.},925$. Le quotient devant exprimer des milliemes, il faudroit mettre 3 zéros à la suite du dividende; mais, comme il faudroit d'abord les mettre à la suite du diviseur, puisqu'il n'a que deux chiffres décimaux, tandis que le dividende en a cinq, on n'en mettra d'aucun côté, et l'on divisera simplement 52453375 par 955, ce qui donnera pour quotient 54925, et par conséquent $54^{mt.},925$. On a vu de même (83) qu'à raison de $1^{dg.},745$ pour $1^{f.}$, on avoit eu pour $75^{f.},45$ $131^{dg.},66025$; donc si l'on divise $131^{dg.},66025$ par $1^{dg.},745$, on doit trouver pour quotient $75^{f.},45$, et c'est ce qu'on trouvera en effet, en divisant (127) 13166025oo par 174500 ou plutôt 13166025 par 1745. Voici les deux opérations :

52453375	955	13166025	1745
4703	$54^{mt.},925$	9510	$75^{f.},45$
8833		7852	
2387		8725	
4775		0000	
0000			

Méthode abrégée pour la division des décimales, et des nouvelles unités.

130. Nous avons vu (87. 4°.) que 20,9780 étoit le produit abrégé de 5,3420 par 3,927. Cherchons donc à présent une méthode de division abrégée, telle qu'en divisant 20,9780 par 5,3420, on retrouve pour quotient 3,927, par des procédés inverses de ceux qu'on a suivis pour la multiplication abrégée. Pour nous faire mieux entendre, nous mettrons les deux regles en regard, et dans la division, nous ferons tout au long les produits et les soustractions partielles.

Multiplication abrégée.		*Division abrégée.*	
5,3420		20,9780	$5{,}\not{3}\not{4}\not{2}\not{0}$
7293		16,0260	3,927
16,0260		4,9520	
4,8078	I.	4,8078	
1068		1442	
374		1068	
20,9780		374	
		374	
		000	

Cela posé, je raisonne ainsi : puisque dans la multiplication, j'ai placé les unités du multiplicateur sous le chiffre inférieur d'un degré aux milliemes, où je voulois borner mon produit, c'est-à-dire, sous les dix milliemes, il faut donc réciproquement, qu'ayant trouvé au quotient les unités 3, je multiplie par ces unités tout le diviseur jusqu'aux dix

milliemes inclusivement. Ce produit fait et retranché du dividende, on a pour premier reste 4,9520. A présent je dis : puisqu'en multipliant le multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, j'ai négligé les chiffres à droite, en tenant compte cependant des dixaines du produit du premier chiffre à gauche de ceux que je néglige, de même, pour trouver chaque quotient partiel, je diviserai chaque reste, non par le diviseur entier, mais par ce même diviseur, dont j'aurai ôté successivement le premier, les deux premiers, etc. chiffres à droite, en tenant compte cependant, à chaque produit partiel, des dixaines du produit du premier à gauche de ces chiffres par le diviseur correspondant. Ainsi je divise le premier reste 49520, non par 53420, mais par 5342, et comme le chiffre supprimé est un o, je n'ai pas eu de dixaines à retenir; ensuite je divise le second reste 1442 par 534, et au produit je n'ai pas encore de dixaines à ajouter, parce que le produit du nouveau chiffre supprimé 2 par le quotient 2 ne fait que 4. Divisant enfin le troisieme et dernier reste 374 par 53, j'ai 7 pour quotient; alors ajoutant au produit 371 de 53 par 7, les 3 dixaines de 28 produit du chiffre supprimé 4 par 7, j'ai 374 que j'ôte de 374, et il reste zéro, comme cela devoit être, puisque, par toutes ces opérations, je n'ai fait que soustraire du produit toutes les sommes partielles dont il étoit composé.

L'inspection seule d'un nouvel exemple, suffira pour entendre sans explication la méthode précédente. On a vu (86. 4°.) que 89,6887338 étoit à un cent millieme près, le produit de 36,3456789658 par 2,4676589. Voici les deux regles :

Multiplication abrégée.

36,3456789658
98 567642

72,691358
14,538272
2,180741
254420
21808
1817
290
32

89,688738

Division abrégée.

89,688738 | 36.345678
72 691358 | 2,4676589

16,997380
14,538272

II. 2,459108
2,180741

278367
254420

23947
21808

2139
1817

322
290

32
32

(1) 00

131. Ce n'est que pour mieux faire sentir la relation qui regne entre les deux regles, que nous avons opéré comme on vient de le voir. Cette regle peut être simplifiée, et s'énoncer de la maniere suivante : 1°. rendez le nombre des chiffres décimaux le même, supprimez la virgule, et ensuite mettez sur la droite du dividende, autant de zéros que vous voulez avoir

(1) On trouvera quelquefois une unité de plus sur le dernier chiffre des produits partiels; cela provient de ce que, pour plus de précision, avant de multiplier par le quotient le chiffre supprimé à chaque division, nous l'avons augmenté d'une unité, quand le chiffre voisin à droite étoit plus grand que 5.

de chiffres décimaux au quotient; 2°. supprimez sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur; et si alors le dividende ne contient pas le diviseur, supprimez un nombre suffisant de chiffres sur la droite de ce diviseur; puis faites la division, qui ne fournira pour ce dernier cas qu'un chiffre au quotient. Ensuite, et dans l'un et l'autre cas, quand le dividende ne contiendra plus le diviseur, continuez de diviser, non par ce diviseur entier, mais par ce même diviseur, dont vous supprimerez successivement un chiffre sur la droite, en ayant soin, dans les produits partiels, de tenir compte des dixaines qui proviendront du produit du dernier chiffre supprimé par le quotient: enfin séparez sur la droite du quotient le nombre de chiffres décimaux demandé. Ainsi, dans le premier exemple ci-dessus, où j'avois à diviser, à un millieme près, 20,9780 par 5,3420, ou plutôt 20,978 par 5,342, je dois, par la premiere partie de la regle ci-dessus, diviser 20978000 par 5342; pour cela, d'après la seconde partie, je supprime les trois zéros du dividende, parce que le diviseur a quatre chiffres; et il me reste à diviser 20978 par 5342 comme il suit:

I.	20978.	5342 (barrés)
	4952	3,927
	144	
	37	
	00	

Je trouve d'abord pour quotient 3, et le reste 4952, qui ne contient plus le diviseur. Supprimant alors successivement les chiffres à droite 2, 4, et 3 de ce diviseur, je trouve les quotiens 9, 2 et 7: le quotient total est donc 3927. Enfin, comme on a demandé que le quotient exprimât des milliemes, je

satisfais à cette condition, en écrivant 3,927; dans le second exemple, où il s'agissoit de diviser 89,688738 par 36,3456789658, la premiere partie de la regle prescriroit de mettre onze zéros à la suite du dividende, dont 4, parce que le diviseur a 4 chiffres décimaux de plus que lui, et 7 parce qu'on veut avoir 7 chiffres décimaux au quotient; mais comme la seconde partie de la regle prescrit d'abord de séparer onze chiffres sur la droite du dividende, parce que le diviseur en a douze; on n'a donc pas besoin de mettre les onze zéros; il ne reste donc plus que 89688738 à diviser par 363456789658, ou plutôt par 36345679, pour que le dividende puisse contenir le diviseur. J'ai écrit 36345679 et non 36345678, parce que le premier à gauche des quatre chiffres supprimés 9658 est plus grand que 5: opérant donc comme l'indique la fin de la regle :

```
      89688738 { 36345679
      16997380 { 2,4676589
       2459108
II.     278367
         23947
          2139
           322
            32
            00
```

je trouve d'abord pour quotient 2, et pour reste 16997380; et supprimant alors successivement un des chiffres du diviseur, je trouve pour quotient 24676589, que je n'ai plus qu'à écrire ainsi 2,4676589 pour avoir le quotient demandé.

Si l'on compare ces deux regles, aux deux qu'on a trouvées précédemment, on verra que les premieres ne different, qu'en ce que, dans la nou-

velle, chaque reste a un chiffre de moins, ce qui provient de ce que le dividende et le diviseur ont aussi un chiffre de moins. Quant aux deux secondes, elles sont exactement les mêmes, parce qu'on a eu soin, comme à l'autre (ce qui est utile pour plus d'exactitude), d'augmenter de 1 le chiffre qu'on supprime à chaque division partielle, lorsque le chiffre voisin à droite surpasse ou même égale 5.

132. Il nous sera bien facile à présent de donner la démonstration de la regle que nous avons prescrite (119), pour diviser, à moins d'une unité près, deux nombres entiers. En effet, puisque d'un côté deux nombres quelconques, soit entiers, soit décimaux, se contiennent de la même maniere, pourvu que ceux-ci aient des décimales de même nature, et que de l'autre, l'on ne demande pas de chiffres décimaux au quotient, il s'ensuit donc que, pour le cas présent, la premiere partie de la regle (131) est nulle, et qu'on doit se borner à suivre la seconde, qui n'est elle-même que la regle donnée dans l'article ci-dessus, à cela près, que l'on n'aura pas de chiffres à séparer au quotient par la virgule.

133. Nous allons terminer par les trois exemples ci-dessous, en observant d'abord que, dans chaque produit partiel, nous tiendrons compte (ex. 130 et 131) du chiffre qui suit celui qu'on supprime, et ensuite que, pour servir de preuve, et pour mieux faire sentir l'utilité de la regle abrégée, nous mettrons au-dessous les mêmes divisions, faites par la regle ordinaire.

Diviser

à un millieme 3,57284 { 2,538

à un millionieme 0,4923457 { 36,49042

à un cent billionieme 0,004897563563 { 189,2746

Divisions abrégées.

1°. 3573 { 2538
1035 { 1,408
20
00

2°. 49235 { 36490|4
12745 { 0,013492
1798
338
10
3

3°. 4897564 { 1892746
1112072 { 0,00002587544
165699
14279
1030
84
8
0

Divisions ordinaires.

1°. 3572840 { 2538
10348 { 1,407
19640
1874

2°. 49234570000 { 3649042
12744150 { 0,013492
17970240
33740720
8993420
1695336

```
3°.  4897563563000 { 1892746
     11120715      { 0,00002587544
      16569856
       14278883
        10296610
         8328800
          7578160
          0007176
```

Preuves de la multiplication et de la division.

134. On a vu (88) que le produit d'une multiplication divisé par un de ses facteurs, donnoit au quotient l'autre facteur, et que, réciproquement, dans la division, le diviseur multiplié par le quotient, reproduisoit le dividende : ces deux opérations se servent donc mutuellement de preuve.

Ainsi, veut-on (65) savoir si, après avoir multiplié 25645 par 365, le produit 9360425 est exact; il faudra diviser 9360425 par le plus grand 25645 des deux facteurs, pour avoir moins de chiffres au quotient, et l'on trouvera pour ce quotient l'autre facteur 365. Veut-on ensuite (105) vérifier le quotient 10947 de l'exemple II, où l'on avoit 3995655 à diviser par 365, on multipliera le diviseur 365 par le quotient 10947, ou plutôt 10947 par 365, et l'on trouvera pour produit 3995655.

135. Mais si, ce qui arrive le plus souvent dans les divisions, il se trouvoit un reste, alors on ajoutera ce reste au produit du diviseur par le quotient. Ainsi (92), après avoir trouvé que 69, divisé par 9, donnoit pour quotient 7 avec le reste 6, pour vérifier ce quotient, je multiplie le diviseur 9 par le quotient 7, et au produit ajoutant le reste 6, je trouve pour somme le dividende 69. Ce qui est

évident : car 69 diminué de 6 contiendroit juste le diviseur 9, 7 fois; donc aussi 7 fois 9, augmenté du reste 6, doit faire le dividende 69.

136. Lorsque les multiplications ou les divisions ont lieu sur de grands nombres, on sent que la preuve devient fort longue. C'est pour obvier à cette longueur, qu'on a inventé une preuve aussi courte qu'ingénieuse. On l'appelle *preuve par* 9, parce qu'elle est fondée sur la propriété suivante du nombre 9 : si vous divisez un nombre quelconque par 9, le reste sera le même, que celui que vous trouveriez en ajoutant ensemble les chiffres de ce nombre, regardés comme exprimant des unités simples, et en retranchant 9 de la somme, à fur et à mesure qu'elle égaleroit ou surpasseroit 9; par exemple, si je divise (134) le facteur 25645 par 9, et que je néglige le quotient, je trouve pour reste 4. Or, à présent je dis que j'aurai le même reste 4, en ajoutant les chiffres 2, 5, 6, 4, 5 du nombre proposé, considérés comme unités simples, et en retranchant 9, à mesure que la somme le contiendra, en effet, 2 et 5 font 7, et 6 font 13, dont j'ôte 9, il reste 4, et 4 font 8, et 5 font 13, dont j'ôte encore 9, et il reste 4 comme ci-dessus. Voici la raison de cette propriété du nombre 9.

Si l'on divise par 9, ou 10, ou 100, ou 1000, etc. il est évident que le reste sera toujours 1 : de même si l'on divise par 9, ou 20, ou 200, ou 2000, etc. le reste sera toujours 2, etc., d'où l'on voit que généralement, si l'on divise par 9 un chiffre significatif quelconque, suivi de tant de zéros qu'on voudra, le reste de cette division sera toujours exprimé par ce chiffre significatif. Or, tout nombre peut se décomposer toujours de cette maniere : 25645, par exemple, peut le décomposer en 20000,

plus 5000, plus 600, plus 40, plus 5; les restes partiels seront donc 2, plus 5, plus 6, plus 4, plus 5 : le reste total sera donc 22, ou en retranchant 2 fois 9 ou 18 de cette somme, il sera 4, comme ci-dessus. On trouveroit de même que le reste du multiplicateur 365, après la division par 9, seroit 5; car, en ajoutant d'abord 3 et 6, on auroit 9, dont on ôteroit 9, ce qui dônneroit pour reste 0, qui, ajouté ensuite à 5, donneroit 5 pour reste final : enfin le reste du produit 9360425 seroit 2, sur quoi l'on observera, que lorsqu'il se trouvera des 9 à ajouter, on peut les omettre.

Cela posé, je remarque que, si l'un des facteurs contenoit 9 exactement, le produit des deux facteurs seroit divisible par 9 sans reste; ainsi supposons que le multiplicande 25645, restant toujours le même, ou eût pour multiplicateur 360 qui contient exactement 9, puisqu'il est égal à 40 fois 9, le nouveau produit seroit divisible par 9, puisqu'on auroit pris 9 fois le produit de 40 fois 25645. Il suit donc delà, que puisque le multiplicateur est 40 fois 9, ou 360 avec un reste 5, il ne peut s'en falloir d'abord que du produit de 25645 par 5, que le produit total ne soit divisible par 9; mais 25645 peut se décomposer en deux parties, l'une 25641 égale à 2849 fois 9, et l'autre 4, reste de la division de 25645 par 9. Donc, puisqu'on vient de voir, qu'il ne s'en falloit que du produit de 25645 par 5, que le produit total fût divisible par 9, il ne doit aussi s'en falloir que du produit de 2849 fois 9 plus du second reste 4, par le premier reste 5, que cette division soit exacte; mais le produit de 2849 fois 9 par 5, c'est-à-dire, 9 fois le produit de 5 fois 2849 est évidemment divisible par 9. Donc enfin, il ne peut s'en falloir que du produit du second reste 4 par le premier reste 5, ou 20, ou même 2, puis-

que 20 est 2 fois 9 avec un reste 2, que le produit total soit divisible par 9.

137. Delà on peut tirer la regle générale suivante, pour faire la preuve par 9 de toute multiplication; 1°. ajoutez les chiffres du multiplicande, comme s'ils étoient des unités simples, et des sommes successives retranchez 9 toutes les fois que vous le pourrez. A la fin, ou il ne vous restera rien, ou il vous restera un nombre moindre que 9. Dans le premier cas, écrivez à part 0, et dans le second, écrivez le chiffre restant. 2°. Opérez de même sur les chiffres du multiplicateur, alors il vous viendra un second reste que vous écrirez au-dessous du premier. 3°. Multipliez ces deux restes, et, des chiffres du produit, ôtez 9 autant que vous le pourrez. Vous aurez un troisieme reste, que vous mettrez à côté du premier. 4°. Ajoutez les chiffres du produit, comme vous avez fait pour ceux des facteurs; retranchez 9 de leur somme, à mesure qu'elle le contiendra, et mettez le quatrieme reste au-dessous du troisieme; alors, si la multiplication a été bien faite, le troisieme et le quatrieme restes seront égaux. Pour mettre de l'ordre dans les quatre restes, on peut les disposer en croix, comme on le voit à côté. Ainsi, veut-on vérifier le produit 9360425 de 25645 par 365, on a vu que le reste de 25645 étoit 4, et que celui de 365 étoit 5. Je multiplie ces deux restes; le produit est 20; qui, en ajoutant 2 et 0, donne pour le troisieme reste 2. Alors si j'ajoute les chiffres du produit 9360425, il fant que le quatrieme reste qui en proviendra soit aussi 2, et c'est ce qui a lieu en effet; d'où je conclus que l'opération a été bien faite.

4	2
5	2

La preuve par 9 s'appliqueroit également à la multiplication des décimales : supposons donc qu'on

Google

veuille (85) vérifier le produit 524,53375 de 54,925 par 9,55, en supprimant les 9 de 54,925 on auroit pour premier reste 7; si on supprime ceux de 9,55, le second reste est 1; multipliant les deux restes, le produit est 7; le troisieme reste est donc aussi 7, qui est encore celui qu'on trouve, en supprimant les 9 de 524,53375.

7	7
1	7

Quant à la division, comme on peut regarder le diviseur et le quotient comme les facteurs d'une multiplication dont le dividende est le produit, il s'ensuit que l'on doit, 1°. écrire le reste que donne le diviseur, après la suppression des 9 qu'il contient; 2°. écrire de même celui que laisse le quotient; 3°. écrire encore celui que donne le produit des deux premiers; 4°. écrire le quatrieme reste que fournissent les chiffres du dividende; et qu'alors, si la division a été bien faite, les deux derniers restes doivent être égaux. Ainsi (134), si je veux vérifier le quotient 10947, provenu de la division de 3995655 par 365, j'ajoute les chiffres du diviseur 365; le premier reste est 5 que j'écris; opérant de même sur les chiffres du quotient 10947; le second reste est 3: multipliant alors 5 par 3 j'ai 15, et par conséquent 6 pour troisieme reste; opérant encore sur le dividende 3995655, j'ai pour quatrieme et dernier reste 6, qui, étant égal au troisieme, me fait voir que le quotient est exact.

5	6
3	6

138. On opéreroit de même pour la division des décimales; et si dans l'un ou l'autre cas, la division donnoit un reste, comme on a vu (134) qu'alors il falloit ajouter ce reste au produit du diviseur par le quotient, il suffiroit, pour la preuve par 9, d'ajouter au troisieme reste, le reste de la division traité à l'ordinaire. Ainsi, si j'avois eu à diviser par

365, 3995893, au lieu de 3995655, le quotient eût été encore 10947; mais on auroit eu le reste 238, puisque 3995893 égale 3995655 plus 238. Alors, après avoir trouvé comme ci-dessus le troisieme reste 6, je lui ajouterois les chiffres 2, 3, et 8, du reste 238 de la division, et le nouveau reste seroit 1, qui est le même que le reste que donne le nouveau dividende 3995893.

Nous remarquerons que, lorsque le premier reste est zéro, on peut se dispenser de chercher le second, puisque son produit par le premier seroit toujours zéro. Alors on voit que la preuve de la multiplication se borne à trouver zéro pour le reste du produit; et celle de la division sans reste, à trouver zéro pour le reste du dividende; et enfin celle de la division avec reste, à trouver le même reste, pour le reste de la division, que pour le dividende.

On voit combien cette preuve est simple et expéditive; il est malheureux qu'elle soit trop souvent sujette à tromper; car, en la suivant, on ne s'appercevroit pas de son erreur, dans les cas que voici : 1°. si on avoit omis un ou plusieurs zéros; 2°. si au contraire on les avoit mis de trop; 3°. si on avoit omis un ou plusieurs 9; 4°. si au contraire on les avoit mis de trop; 5°. si on eût mis un zéro pour un 9 ou un 9 pour un zéro; 6°. si on avoit renversé l'ordre de deux ou plusieurs chiffres; 7°. enfin si on avoit fait deux ou plusieurs erreurs qui se compensassent, par exemple, si au lieu de 38 on eût écrit 29; car la somme de ces chiffres est également 11.

139. C'est pour éviter la presque totalité de ces erreurs, que nous exposerons la preuve par 11, ainsi nommée, parce qu'elle est appuyée sur cette propriété du nombre 11, analogue à celle dont on vient de voir que jouissoit le nombre 9. Si on di-

vise successivement par 11, 1, 10, 100, 1000, 10000, 1000000, etc. les restes des divisions seront alternativement 1 et 10, 1 et 10, 1 et 10, etc. d'où il suit que, lorsqu'il s'agira de celles dont le nombre total des chiffres du dividende est impair, (on appelle nombres pairs ou impairs, ceux qui sont ou ne sont pas exactement divisibles par 2), c'est-à-dire, ou de 1, ou de 100, ou de 10000, etc. qui renferment 1, ou 3, ou 5 chiffres, etc. les restes des divisions seront toujours 1, et qu'au contraire, si l'on divise ceux dont le nombre total des chiffres est pair, comme 10, ou 1000, ou 100000, etc. qui contiennent 2, ou 4, ou 6 chiffres, etc. les restes de division seront toujours 10 : donc, dans le premier cas, il faudroit ôter 1 des dividendes 1, 100, etc. pour qu'ils devinssent exactement divisibles par 11; et au contraire, dans le second, il faudroit ôter 10 des dividendes 10, 1000, etc. ou ce qui revient au même, leur ajouter 1, pour qu'ils pussent se diviser sans reste par 11. Ainsi, si de 10000, qui a un nombre impair de chiffres, j'ôte 1, le reste est 9999, qui contient 11, 909 fois justes; et si à 100000, qui a un nombre pair de chiffres j'ajoute 1, j'ai 100001 qui contient 11 exactement 9091 fois. Si de 100000, j'eusse ôté 10, au lieu de lui ajouter 1, j'aurois eu 99990 dont le onzieme est 9090. On voit de même que si l'on divise par 11, ou 2, ou 200, ou 20000, ou, etc. le reste sera 2; et que si, au contraire, on divise 20, ou 2000, ou, etc. le reste sera 9; donc si, lorsque le nombre des chiffres est impair on ôte 2, ou si, lorqu'il est pair on ôte 9, ou l'on ajoute 2, le nombre deviendra divisible exactement par 11; il en seroit de même pour 3, ou 300, ou, etc. et pour 30, ou 3000, etc. qui deviendroient exactement divisibles par 11, en ôtant des premiers 3, et en ajoutant 3 aux seconds:

donc on peut conclure que, selon que le nombre des chiffres que contient un nombre quelconque, suivi de tant de zéros qu'on voudra, sera pair ou impair, il faudra ajouter au nombre entier, ou en ôter le chiffre significatif, pour que ce nombre devienne exactement divisible par 11. Cela posé, un nombre étant donné, 6834 par exemple, je puis le décomposer en 6000, plus 800, plus 30, plus 4; à présent si je rassemble d'un côté 6000 et 30 qui ont un nombre pair de chiffres, et de l'autre 800 et 4 qui en ont un nombre impair, je vois qu'il faudroit ajouter 6 à 6000, et 3 à 30, ou en tout ajouter 9 à la somme des deux, pour que 6000, plus 30, fussent divisibles par 11; tandis que, d'un autre côté, il faudroit ôter 8 de 800, et 4 de 4, ou ôter 12 de la somme des nombres 800 plus 4, pour que la division par 11 fût exacte : donc puisque d'un côté il faut ôter 12 et de l'autre ajouter 9, il faut donc ôter en tout 3, pour que le nombre total soit divisible par 11 : et c'est ce qui a lieu en effet; car si on ôte 3 du nombre 6834, il reste 6831, dont le onzieme est juste 621. Si l'on avoit 35481, en le décomposant en 30000, plus 5000, plus 400, plus 80, plus 1, on voit que des nombres 30000, plus 400, plus 1, qui ont un nombre impair de chiffres, il faudroit ôter 3, plus 4, plus 1 ou 8, tandis qu'à 5000, plus 80, qui en ont un nombre pair, il faudroit ajouter 5 plus 8 ou 13; donc en tout il faudroit ajouter 13 moins 8 ou 5, au nombre 35481, pour qu'il devînt divisible par 11, et en effet, 35486 contient 11, 3226 fois.

On voit par ces deux exemples que le reste des deux sommes peut être également ôté ou ajouté. Il importe cependant, pour ne pas compliquer inutilement la regle que nous nous proposons d'établir, 1°. qu'on se décide pour l'une des deux especes de

restes; et, 2°. qu'une des deux une fois adoptée, on sâche y ramener l'autre. D'abord nous adopterons ceux qu'on doit ôter, ou les soustractifs comme les plus naturels, puisque c'est en ôtant le reste du dividende, qu'il devient exactement divisible par 11. Quant au second article, c'est-à-dire, à ramener un reste additif à l'autre, rien de plus simple, puisqu'il suffit pour cela de prendre sa différence à 11 : car on voit que s'il faut ajouter 5, par exemple, à un nombre, pour le rendre divisible par 11, il le deviendra encore, si on en ôte 6, qui est sa différence à 11.

Ce qu'on vient de dire suffiroit pour établir notre regle : mais pour lui donner le plus de simplicité possible, nous examinerons les cas où le reste doit être additif ou soustractif : et, pour abréger, nous appellerons chiffres de rang impair, le premier, le troisieme, le cinquieme chiffre, etc. d'un nombre proposé ; et chiffres de rang pair, le second, le quatrieme, le sixieme chiffre, etc. de ce nombre. Cela posé, ou le nombre total des chiffres est pair, ou il est impair ; 1°. s'il est pair, on voit qu'il faut ajouter tous les chiffres de rang impair, et ôter tous ceux de rang pair : donc, pour que, dans ce premier cas, le reste soit soustractif, il faut que la somme des chiffres de rang pair soit la plus forte : dans le cas contraire. le reste seroit additif, et il faudroit prendre la différence à 11 ; 2°. si le nombre total des chiffres est impair, on voit encore qu'il faut ôter tous les chiffres de rang impair, et au contraire, ajouter tous ceux de rang pair : donc, pour que, dans ce second cas, le reste soit soustractif, il faut que la somme des chiffres de rang impair l'emporte sur celle des chiffres de rang pair : si cela n'étoit pas, le reste seroit additif, et il faudroit prendre la différence à 11. Delà, on peut conclure cette regle générale.

140. Pour trouver le reste de la division d'un nombre quelconque par 11, il faut ajouter séparément, et comme des unités simples, les chiffres de rang impair, et ceux de rang pair; alors, le nombre total des chiffres étant pair ou impair, si la somme la plus forte est celle des chiffres de rang pair ou impair, le reste de ces deux sommes sera le reste cherché; sinon, ce reste sera l'excès de 11 sur le reste de ces sommes.

Ainsi, dans le premier exemple 6834, où le nombre total 4 des chiffres est pair, la somme 12 des chiffres de rang pair étant plus grande de 3 que la somme 9 des chiffres de rang impair, j'en conclus que le reste de la division de 6834 par 11 est 3. Dans le second exemple 35481, où le nombre total 5 des chiffres est impair, la somme 8 des chiffres de rang impair étant plus petite de 5 que la somme 13 des chiffres de rang pair, j'en conclus que le reste de la division de 35481 par 11 n'est pas 5, mais la différence de 11 à 5 ou 6. Si le reste surpassoit 1 fois 11, ou 2 fois 11, ou 3 fois 11, etc. c'est-à-dire, 11, ou 22, ou 33, etc. on commenceroit par le diminuer de ces nombres. Ainsi soit proposé 19091829, où le nombre total 8 des chiffres est pair; la somme des chiffres de rang impair est 4; celle des chiffres de rang pair qui est la plus forte est 35: la différence est 31, dont j'ôte 22; et il reste 9 pour le reste de 19091829 divisé par 11.

141. A présent que l'on sait trouver le reste de la division d'un nombre quelconque par 11, on démontreroit, absolument de la même manière que pour le nombre 9, 1°. que, après avoir trouvé les deux restes des 11 que peuvent renfermer, ou deux facteurs, ou un diviseur et un quotient, il ne peut s'en falloir que du produit de ces deux restes, en supprimant les 11, que le produit ou le dividende

soient divisibles par 11; et, 2°. que si au produit des deux restes du diviseur et du quotient, on ajoute le reste des 11 que renferme le reste d'une division, la somme, après avoir supprimé les 11, sera la même que le reste du dividende. Nous nous dispenserons donc de donner la regle générale, pour faire la preuve par 11 d'une multiplication ou d'une division, puisque ce sont presqu'absolument les mêmes mots. Voyons seulement quelques exemples.

Prenons d'abord celui de la page lxviij, où l'on avoit à multiplier 493127 par 397281 : les nombres des chiffres sont tous deux pairs ; dans le premier nombre la somme des chiffres pairs est 17, et celle des impairs n'est que 9; le reste est donc 8; je l'écris à côté, en disposant les quatre restes en croix, comme dans la preuve par 9; dans le second nombre, la somme des chiffres impairs est 18, et celle des chiffres pairs est 12 ; le reste est 6 dont la différence à 11 est 5, que j'écris sous 8. Multipliant alors les deux restes, j'ai 40, dont ôtant 33, j'ai 7 que j'écris pour troisieme reste. Passant au produit 195909987687, le nombre de ses chiffres est pair, et de plus, la somme 48 des chiffres pairs est plus grande que la somme 30 des impairs ; le reste est donc la différence de ces sommes, c'est-à-dire 18, ou plutôt 7. Le produit est donc exact.

8	7
5	7

On a vu (page civ) que 59118858 contenoit 8273, 7146 fois justes. Pour appliquer à cette division la preuve par 11, je dis : 8273 et 7146 ont tous deux un nombre pair de chiffres, et de plus dans tous deux les sommes 8 et 7 ou 15, et 7 et 4 ou 11 des chiffres impairs, sont plus fortes que les sommes 2 et 3 ou 5, et 1 et 6 ou 7 des pairs. Prenant donc la différence des restes 10 et 4 à 11, j'ai 1 et 7 que je multiplie entr'eux, le produit est 7. Enfin le dividende à un nombre pair de chif-

1	7
7	7

fres, et de plus, la somme 26 des chiffres pairs est plus grande que celle 19, des chiffres impairs ; donc la différence de 19 à 26 ou 7 est le quatrieme reste, qui, étant de même que le troisieme, me fait voir que le quotient est exact.

Si l'un des restes étoit zéro, l'opération en deviendroit plus courte : si, par exemple, le diviseur donnoit zéro pour reste, alors on omettroit celui du quotient, parce que le produit de celui-ci par zéro, seroit toujours zéro. Si je voulois, par exemple, vérifier si le dividende 8945 contient 187, 47 fois avec le reste 156, je vois d'abord que la somme 8 des chiffres impairs 1 et 7 du diviseur, vaut son chiffre pair 8; le reste est donc zéro ; et passant tout de suite au reste 156, j'ai 2 que j'écris, et qui étant en effet le reste de 8945, prouve l'exactitude de l'opération. Nous finirons en observant, 1°. que la différence de la propriété du nombre 9 et de celle du nombre 11, consiste en ce que, pour le nombre 9, on ajoute la somme des chiffres pairs et celle des chiffres impairs, et qu'au contraire, pour le nombre 11, on retranche l'une de ces sommes de l'autre.

0	2
0	2

2°. Que la preuve par 9 est à la vérité un peu plus courte que celle par 11; mais que celle-ci a l'avantage de n'être pas sujette comme l'autre, aux erreurs qui proviennent soit de l'altération, soit de l'omission des chiffres, parce qu'elle dépend, comme on l'a vu, non-seulement de la valeur, mais de plus, du nombre de ces chiffres.

Des Fractions.

142. L'on sait (93) que si l'on a 15 francs à diviser entre 4 personnes, le quotient total est $3\frac{3}{4}$ de francs;

et que $\frac{3}{4}$ indique qu'il reste 3 francs à diviser en 4 parties égales, c'est-à-dire, qu'il faut prendre un quart de 3 francs; mais d'un autre côté, $\frac{3}{4}$ de franc est évidemment la même chose que trois fois le quart de 1 f.; donc le quart de 3 francs vaut 3 fois le quart de 1 f. On voit donc qu'au lieu de partager 3 f. en 4 parties égales, pour en prendre une, on peut d'abord partager 1 f. en 4 parties égales, et ensuite prendre 3 de ces parties. Sous ce point de vue, $\frac{3}{4}$ est ce qu'on appelle une *fraction*.

143. Cela posé, 1°. le reste étant toujours plus petit que le diviseur, il s'ensuit qu'une fraction est toujours plus petite que l'unité; 2°. que toute fraction est composée de deux termes, l'un inférieur, qui marque en combien de parties l'unité est divisée, et l'autre supérieur, qui désigne combien l'on prend de ces parties. Comme le premier de ces termes sert à *dénommer* telle espece de fraction de l'unité plutôt que telle autre, c'est-à dire des quarts, par exemple, plutôt que des tiers, ou, etc. on est convenu de l'appeler *dénominateur;* et le second s'appelle *numérateur*, parce qu'il marque quel *nombre* on doit prendre des parties exprimées par le dénominateur.

144. Il pourroit se présenter sous la forme de fraction, des nombres dont le numérateur fût le même, ou plus grand que le dénominateur; tels seroient, par exemple, $\frac{6}{6}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{17}{12}$. Ces nombres n'étant autre chose que 6 à diviser par 6, que 15 à diviser par 5, et que 17 à diviser par 12, équivaudroient à 1, 3 et $1\frac{5}{12}$; mais on pourroit aussi, en les envisageant comme des fractions, arriver aux mêmes résultats. Car, puisque dans le premier nombre $\frac{6}{6}$ l'unité est divisée en 6 parties égales, et qu'on les prend toutes les 6, il est clair qu'on a pour résultat l'unité; d'où il suit que le second $\frac{15}{5}$, valant $\frac{5}{5}$, plus $\frac{5}{5}$,

plus $\frac{5}{5}$, vaut 3 unités, et que le troisieme $\frac{17}{12}$ n'étant que $\frac{12}{12}$, plus $\frac{5}{12}$, vaut (16) le nombre fractionnaire 1 $\frac{5}{12}$.

145. Concluons de ce qu'on vient de dire : 1°. qu'on peut traiter comme des fractions, celles dont le numérateur vaut ou surpasse le dénominateur; 2°. qu'on peut mettre l'unité sous la forme d'une fraction, qui ait tel dénominateur qu'on voudra, en lui donnant le même nombre pour numérateur. Ainsi, pour mettre 1 sous la forme d'une fraction qui ait ou 2, ou 12, ou 100 pour dénominateur, j'écris $\frac{2}{2}$, $\frac{12}{12}$, $\frac{100}{100}$; 3°. que pour changer un entier en fraction qui ait un dénominateur donné, il faut lui donner pour numérateur, le produit de l'entier par le dénominateur. Ainsi pour mettre 3, sous la forme d'une fraction, qui ait 5 pour dénominateur, j'écris $\frac{15}{5}$, d'où il suit, qu'au lieu de 3, on peut écrire $\frac{3}{1}$, et qu'en général, on peut mettre tout entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; 4°. que pour réduire un nombre fractionnaire en fraction, de même espece que celle qui l'accompagne, il faut multiplier l'entier par le dénominateur, et au produit ajouter le numérateur; ainsi 1 $\frac{5}{12}$ fait $\frac{17}{12}$, en multipliant l'entier 1 par le dénominateur 12, et ajoutant le numérateur 5 au produit 12. De même 6 $\frac{2}{3}$ font $\frac{20}{3}$; 11 $\frac{5}{9}$ font $\frac{100}{9}$, etc.

Pour pouvoir opérer sur les fractions, il est d'abord utile qu'elles soient réduites à leur plus grand degré de simplicité; et ensuite il est souvent indispensable qu'elles soient ramenées à n'avoir qu'un même dénominateur. Mais, avant d'en venir à ces transformations, il convient d'établir les principes suivans, sur lesquels elles sont appuyées.

146. Si l'on multiplie ou si l'on divise le numérateur d'une fraction, de $\frac{3}{4}$, par exemple, par un

nombre comme 3, les nouvelles fractions $\frac{9}{4}$ et $\frac{1}{4}$ qui proviendront delà, seront 3 fois plus grande ou plus petite que la fraction proposée $\frac{3}{4}$; car, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{4}$ et $\frac{1}{4}$ étant la même chose que 3 fois $\frac{1}{4}$ (142), 9 fois $\frac{1}{4}$ et 1 fois $\frac{1}{4}$, on voit que les deux dernieres sont l'une le triple, et l'autre le tiers de la premiere.

147. Si l'on multiplie ou si l'on divise le dénominateur d'une fraction, de $\frac{3}{4}$, par exemple, par un nombre comme 2, les nouvelles fractions $\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{2}$, qui en résulteront, seront deux fois plus petite ou plus grande que la fraction proposée $\frac{3}{4}$: car d'un côté $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{2}$ valent 3 fois, ou $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{8}$, ou $\frac{1}{2}$; de l'autre $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{2}$, sont, l'une deux fois plus petite que $\frac{1}{4}$, et l'autre deux fois plus grande, puisque l'unité est divisée dans la premiere en deux fois plus de parties, et dans l'autre en deux fois moins; donc aussi $\frac{3}{8}$ et $\frac{3}{2}$ sont l'une deux fois plus petite, et l'autre deux fois plus grande que $\frac{3}{4}$.

148. Concluons donc, 1°. que, si l'on multiplie ou divise par un nombre quelconque, le numérateur d'une fraction, ce sera multiplier ou diviser la fraction par ce nombre; 2°. que si on multiplie ou divise le dénominateur d'une fraction par un nombre quelconque, ce sera diviser ou multiplier la fraction par ce nombre; 3°. que si l'on multiplie ou divise les deux termes d'une fraction par un même nombre, on n'altérera pas la valeur de la fraction, puisque, par la seconde opération, on divise ou l'on multiplie la fraction, par le même nombre par lequel on l'avoit multipliée ou divisée. Ainsi $\frac{9}{12}$ est la même chose que $\frac{3}{4}$, qu'on trouve en divisant 9 et 12 par 3; $\frac{1}{2}$ est la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{50}{100}$, etc. qu'on trouve en multipliant les deux termes de $\frac{1}{2}$ par 2, par 3, par 50, etc. Si l'on compare ces trois derniers articles avec ceux des nos. 120, 121 et 122, on verra tout de suite qu'en considérant le numérateur

d'une fraction comme le dividende d'une division, le dénominateur comme le diviseur, la fraction elle-même comme le quotient et réciproquement, les résultats sont les mêmes, et que, si la forme des raisonnemens est changée, cela provient du nouveau point de vue sous lequel on a envisagé les fractions.

149. Voyons maintenant la maniere de ramener une fraction à être exprimée par les plus petits termes possibles, ce qu'on appelle *réduire une fraction à sa plus simple expression ;* et ensuite comment on peut *réduire plusieurs fractions au même dénominateur.* On va voir que, pour le premier cas, il suffit de diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, et que, pour le second, il ne faut que multiplier les deux termes de plusieurs fractions par un même nombre. Voyons d'abord à réduire une fraction à sa plus simple expression, comme nous avons fait pour $\frac{9}{12}$, que nous avons réduit à $\frac{3}{4}$, en divisant les deux termes par 3, et comme nous pourrions faire pour $\frac{50}{100}$, que nous réduirions à $\frac{1}{2}$, en divisant les deux termes par 50. Comme on auroit trouvé la même fraction $\frac{1}{2}$, en divisant d'abord 50 et 100 par 2, ce qui eût donné $\frac{25}{50}$, puis 25 et 50 par 5, ce qui eût fait $\frac{5}{10}$, et enfin 5 et 10 par 5; ce qui feroit $\frac{1}{2}$; on voit donc qu'on peut réduire une même fraction à sa plus simple expression, ou par plusieurs divisions successives, ou par une seule, dont le diviseur prend alors le nom de *plus grand commun diviseur.* Voyons d'abord la premiere maniere, et pour cela, cherchons à quels signes on peut reconnoître qu'un nombre est divisible par tel ou tel nombre.

150. 1°. Tout nombre est divisible par 2, quand son dernier chiffre à droite l'est. En effet, il ne peut rester de la division de tous ses autres chiffres

que o, et alors tout le nombre est évidemment divisible par 2; ou 1, qui valant 1 dixaine, ou 10, l'est aussi, puisque sa moitié est 5. Ainsi 2402 et 54814, ayant leur dernier chiffre divisible par 2, le sont aussi; et en effet les quotiens exacts sont 1201 et 27407.

2°. Tout nombre est divisible par 4, quand ses deux derniers chiffres le sont; car le reste provenant de la division de tous les chiffres, hors les deux derniers, ne peut être que 0, cas où l'on voit que tout le nombre est divisible par 4, et 1, ou 2, ou 3, qui valent 1 centaine, ou 2 centaines, ou 3 centaines, c'est-à-dire, 100, ou 200, ou 300; or 100 est divisible par 4, donc deux fois 100 et trois fois 100 le sont aussi; d'un autre côté les deux derniers chiffres le sont: donc tout le nombre l'est. Ainsi le quart de 424, 3324, 24624 et 364324, où avec les deux mêmes chiffres 24, les restes sont 0, 1, 2 et 3, est de 106, 831, 6156 et 91081, sans restes.

3°. Tout nombre est divisible par 8, quand ses trois derniers chiffres le sont; ce qu'on feroit voir de même que ci-dessus, en observant, 1°. que les restes ne peuvent être que 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 7; 2°. que ces quantités expriment des mille; et 3°. que toutes sont divisibles par 8, puisque 1000 l'est. Ainsi le huitieme de 5568 et de 75336, sont juste de 696 et de 9417, parce que leurs trois derniers chiffres 568 et 336 sont divisibles par 8. On prouveroit de même, que tout nombre est divisible par 16, quand ses 4 derniers chiffres le sont; par 32, quand ses 5 derniers chiffres le sont, etc.

151. Tout nombre est divisible par 3, quand la somme de ses chiffres, ajoutés comme unités simples, fait 3 ou un multiple de 3; propriété qui se prouveroit comme celle du nombre 9 (136). Donc tout nombre est divisible par 6, quand la somme de ses

chiffres fait 3 ou un multiple de 3, et que de plus le dernier chiffre est pair; puisque d'un côté on vient de voir qu'il étoit divisible par 3, et (150) qu'il l'étoit par 2. De même il seroit divisible par 12, 24, etc. si dans la même supposition, ses deux derniers ou ses trois derniers chiffres étoient divisibles par 4 ou par 8 ou etc. Ainsi 3036 est divisible par 12, parce que les deux derniers chiffres 36 sont divisibles par 4, et que de plus la somme des chiffres est 12, qui fait 4 fois 3; et en effet, le douzieme de 3036 est 253. De même le quarante huitieme de 2598528 est exactement de 54136, parce que les quatre derniers chiffres 8528, sont divisibles par 16, et que de plus la somme des chiffres fait 39, ou 13 fois 3.

On démontreroit d'une maniere analogue, que tout nombre est divisible par 18, ou 36, ou 72, etc. lorsque, la somme de ses chiffres étant 9 ou un multiple de 9, son dernier, ses deux derniers, ses trois, etc. derniers chiffres, sont divisibles ou par 2, ou par 4, ou par 8, etc.

152. On sait que tout nombre est divisible par 10, par 100, par 1000, etc. selon qu'il finit par 1, ou 2, ou 3 zéros, etc. De plus, tout nombre qui finit par un 5 est divisible par 5; car le reste provenu de la division des autres chiffres ne peut être que 0, ou 1, ou 2, ou 3, ou 4, qui valant des dixaines, ou 10, 20, 30 et 40, sont divisibles par 5, puisqu'elles le sont par 10. Ajoutons, 1°. que tout nombre terminé par 25, 50 ou 75, est divisible par 25, puisque le reste provenu de la division des autres chiffres, ne peut donner qu'un nombre de centaines depuis 1 jusqu'à 24 inclusivement, toutes divisibles par 25, puisque le 25e. de 100 est juste 4; 2°. qu'un nombre déjà divisible par 5, l'est encore par 3, ou en tout par 15, si la somme des chiffres est 3 ou un multiple de 3; le sera encore par 9, en tout par 45, si cette somme est

9 ou un multiple de 9. Ainsi 9135 a pour 45e. exact 203, parce que le dernier des chiffres est 5, et que leur somme fait 18 ou deux fois 9.

153. On a vu (139) à quel signe un nombre étoit divisible par 11 ; on pourra donc dire qu'un nombre dejà divisible par 11, le sera par 2 fois 11, ou 4 fois 11, ou 8 fois 11, etc. c'est-à-dire, par 22, 44, 88, etc. si son dernier, ses deux derniers, ses trois derniers chiffres, etc. sont divisibles par 2, ou 4, ou 8, etc. et que, dans la même supposition, il sera divisible par 3 fois 11, ou 33, et 9 fois 11, ou 99, si en outre la somme de ses chiffres est 3 ou un multiple de 3, ou bien 9 ou un multiple de 9. Ainsi 6138 divisé par 99, donne 62, parce que la somme des chiffres pairs 9 est égale à celle des impairs, qui est aussi 9, et que de plus les deux sommes font 18 ou 2 fois 9.

154. Servons-nous maintenant de ces propriétés des nombres, pour établir la regle qu'il faut suivre, pour réduire une fraction donnée à sa plus simple expression : et d'abord, pour procéder avec ordre, on examinera si les deux termes sont divisibles par 2, c'est-à-dire, s'ils finissent par un chiffre pair. Si cela est, on fera la division, et si les deux quotiens sont encore divisibles par 2, on divisera encore, et on continuera la division par 2, jusqu'à ce que l'un des termes ou tous les deux ne soient pas divisibles par 2. Alors on examinera s'ils seroient divisibles par 3, c'est-à-dire, si la somme de leurs chiffres fait 3 ou un multiple de 3. Si cette condition a lieu, on divisera ces termes par 3, et si les quotiens sont encore divisibles par 3, on divisera encore, et on continuera cette division par 3, jusqu'à ce que les deux termes, ou même l'un des deux, cessent d'être divisibles par 3. Alors on verra si les deux termes sont divisibles par 5, c'est-à-dire, s'ils finissent tous deux par un zéro ou par un 5, ou l'un par un 0 et l'autre par un 5.

Alors on divisera par 5, et si les quotiens sont encore divisibles par 5, on divisera de nouveau, et l'on continuera de même, jusqu'à ce que les termes, ou l'un des deux, ne soient plus divisibles par 5. Enfin l'on tentera successivement les nombres 7, 11, 13, etc. c'est à dire, ceux qui n'ont pas d'autres diviseurs qu'eux-mêmes et l'unité, et qu'on appelle nombres *premiers*.

155. Avant d'appliquer à des exemples la regle ci-dessus, nous nous servirons de la considération des nombres premiers, pour épargner aux commençans plusieurs tentatives; en effet, il peut arriver, ou, 1°. que les deux termes soient des nombres premiers, et alors on voit qu'il seroit bien inutile de chercher à les diviser par un même nombre; ou, 2°. que l'un des termes seulement soit un nombre premier; et d'abord si c'est le plus grand, c'est-à-dire, le dénominateur, il est évident qu'il n'y a pas de division à tenter; et si c'est le plus petit ou le numérateur, il n'est pas moins évident qu'il n'y aura de diviseur commun aux deux termes, qu'autant que le dénominateur sera multiple du numérateur. Donc lorsque les deux termes, ou seulement le dénominateur, seront des nombres premiers, on n'aura pas de réduction à espérer; il faudra donc laisser la fraction telle qu'elle est; et lorsque le numérateur sera un nombre premier, on verra si le dénominateur est multiple du numérateur; et ayant alors fait la division, on aura une fraction dont le numérateur sera l'unité, et le dénominateur sera le quotient de la division. Ainsi si j'avois $\frac{7}{11}$ à réduire : comme je sais que 7 et 11 sont des nombres premiers, j'en conclus que la fraction $\frac{7}{11}$ est *irréductible*. Si j'avois encore $\frac{12}{17}$, comme 17 est un nombre premier, j'en conclus encore que $\frac{12}{17}$ est irréductible. Mais si j'avois $\frac{11}{33}$, où 11 étant nombre premier, 33 est multiple de 11, j'écrirois au lieu de $\frac{11}{33}$ la fraction $\frac{1}{3}$ que

j'aurois, en écrivant l'unité pour numérateur, et pour dénominateur 3, quotient de la division de 33 par 11.

Il ne reste donc plus, pour être en état d'appliquer cette regle préliminaire, que de savoir distinguer quand un nombre est premier. Comme la loi de ces nombres est inconnue, nous allons y suppléer par une table des nombres premiers, depuis 1 jusqu'à 500, extraite des tables de Lambert, qui vont jusqu'à 102000.

1	53	131	223	311	409
2	59	137	227	313	419
3	61	139	229	317	421
5	67	149	233	331	431
7	71	151	239	337	433
11	73	157	241	347	439
13	79	163	251	349	443
17	83	167	257	353	449
19	89	173	263	359	457
23	97	179	269	367	461
29	101	181	271	373	463
31	103	191	277	379	467
37	107	193	281	383	479
41	109	197	283	389	487
43	113	199	293	397	491
47	127	211	307	401	499

156. Proposons-nous maintenant quelques fractions à réduire à leur plus simple expression. Soit pris pour exemple $\frac{64}{96}$. Comme le dernier chiffre de chaque terme est pair, je vois d'abord qu'ils sont divisibles

divisibles par 2 ; je les divise donc, et j'ai $\frac{32}{48}$, que par la même raison, je divise encore par 2, ce qui me donne $\frac{16}{24}$, qui, divisés encore trois fois de suite par 2, donnent successivement $\frac{8}{12}$, $\frac{4}{6}$, et enfin $\frac{2}{3}$, dont les termes, étant tous deux des nombres premiers, sont irréductibles. On auroit pu trouver la fraction finale plus brièvement, en observant que les termes 64 et 96 sont (150. 2°) divisibles par 4 ; car, en effectuant la division, on auroit $\frac{16}{24}$, qui, étant encore divisibles et divisés par 8, donneroient $\frac{2}{3}$, comme ci-dessus.

Soit donné pour second exemple $\frac{180}{216}$. Le dernier chiffre étant pair dans les deux termes, je les divise par 2, et j'ai $\frac{90}{108}$, qui, divisés encore par 2, donnent $\frac{45}{54}$. A présent que 45 n'est plus divisible par 2, j'essaie 3, qui doit réussir, parce que la somme des chiffres des deux termes est de part et d'autre 9, multiple de 3 ; divisant donc ces termes par 3, j'ai $\frac{15}{18}$, qui sont encore divisibles par 3 ; je les divise donc, et il me vient enfin $\frac{5}{6}$, qui ne peut plus se réduire, parce que (155) le numérateur est un nombre premier, qui n'est pas un facteur du dénominateur. Si l'on remarque que les deux chiffres à droite des deux termes de $\frac{180}{216}$, sont divisibles par 4, on voit que ces termes le sont aussi ; prenant donc le quart, on a $\frac{45}{54}$. Or la somme des chiffres de 45 et de 54 est de part et d'autre 9. Donc ils sont divisibles par 9, ce qui, en divisant, donne encore $\frac{5}{6}$.

On auroit pu même obtenir ce résultat d'un seul coup, en divisant par 36, puisque (151) la somme des chiffres de 180 et de 216, fait de part et d'autre 9, et que de plus les deux derniers chiffres 80 et 16 sont divisibles par 4.

Soit encore $\frac{330}{462}$. Je divise par 2 les deux termes, et j'ai $\frac{165}{231}$, dont les termes ne sont plus divisibles par 2. Mais je vois que la somme des chiffres est pour

l'un 12, ou 4 fois 3, et pour l'autre 6, ou 2 fois 3 ; je les divise donc par 3, et j'ai $\frac{55}{77}$, dont les termes ne sont plus divisibles par 3. Mais on voit tout de suite que le premier chiffre, tant de 55 que de 77, est égal au second. Donc on peut diviser ces nombres par 11, et l'on a enfin $\frac{5}{7}$. On eût pu obtenir ce résultat d'un seul coup, en observant, 1°. que la somme des chiffres de 330 et de 462 est un multiple de 3 ; 2°. que le dernier chiffre est pair ; et 3° enfin, que dans ces deux termes, la somme des chiffres de rang pair est égale à celle des chiffres de rang impair ; car alors on auroit vu que les deux termes étoient à la fois divisibles par 3, par 2 et par 11, et par conséquent par les produits 66 de 3 par 2 et par 11. Alors divisant 330 et 462 par 66, on auroit eu 5 et 7, ou $\frac{5}{7}$.

Soit enfin $\frac{6930}{9240}$. Divisant par 2, j'ai $\frac{3465}{4620}$; ensuite par 3, je trouve $\frac{1155}{1540}$, dont le terme 1540 n'est pas divisible par 3. Mais je vois que les deux nombres finissent par un 5 et un 0 ; je peux donc les diviser par 5, et il me vient $\frac{231}{308}$, qui n'est plus divisible par 5. J'essaie donc 7 ; il réussit, et les deux quotiens sont $\frac{33}{44}$, évidemment divisibles par 11. J'ai donc enfin $\frac{3}{4}$, que j'aurois pu trouver en deux fois de la maniere suivante. Pour cela, j'aurois dit : 1°. la somme des chiffres 6930 et 9240 est multiple de 3 ; 2°. le dernier chiffre est dans tous deux un 0 ; 3°. la somme des chiffres de rang pair égale dans le premier et surpasse de 11 dans le second, celle des chiffres de rang impair ; donc ces nombres sont à la fois divisibles par 3, par 10 et par 11, ils le sont donc par leur produit 330 ; les divisant, j'aurois eu $\frac{21}{28}$, qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ; mais si l'on divise par 7, on trouve $\frac{3}{4}$.

157. Dans tous les exemples ci-dessus, où les diviseurs successifs ont été de petits nombres, on a

facilement réussi ; mais si le commun diviseur étoit un très-grand nombre premier, si par exemple, on proposoit de réduire $\frac{16637}{24257}$, dont le numérateur et le dénominateur sont le produit des deux nombres premiers 131 et 191, par le même nombre premier 127, on sent qu'il seroit excessivement long d'essayer la division par tous les nombres premiers, depuis 3 jusqu'à 127. Il est donc très-utile d'avoir une regle qui, par une voie aussi courte que certaine, vous conduise à trouver le plus grand commun diviseur. Voyons donc cette regle ; et d'abord prenons pour exemple $\frac{180}{216}$, le second de ceux que nous avons résolus. Je divise d'abord le plus grand des deux nombres par l'autre, c'est-à-dire, 216 par 180 ; le quotient est 1, et le reste 36 ; 216 est donc égal à 180 plus 36. Je puis donc, au lieu de $\frac{180}{216}$, écrire $\frac{180}{180 \text{ plus } 36}$; d'où l'on voit que le diviseur cherché, devant diviser les deux termes, doit aussi diviser 36, et ne peut par conséquent être plus grand que le reste 36. Je divise maintenant le premier diviseur 180 par ce reste 36, et je trouve pour quotient 5, sans reste. 180 n'est donc que 5 fois 36 ; je puis donc, au lieu de $\frac{180}{180 \text{ plus } 36}$, écrire $\frac{5 \text{ fois } 36}{5 \text{ fois } 36 \text{ plus } 36}$, ou $\frac{5 \text{ fois } 36}{6 \text{ fois } 36}$, ou $\frac{5}{6}$ en divisant les deux termes par le même nombre 36 (148).

Prenons encore l'exemple suivant $\frac{330}{462}$. Je divise 462 par 330, et j'ai pour quotient 1, et 132 pour reste. Je puis donc mettre la fraction sous cette forme $\frac{330}{330 \text{ plus } 132}$; donc le commun diviseur divisant 330 ainsi que 462, doit d'abord diviser 132, et ensuite ne peut être plus grand que 132 ; je divise à présent le diviseur 330 par le premier reste 132 ; j'ai pour quotient 2, et pour second reste 66. Donc au lieu de $\frac{330}{330 \text{ plus } 132}$, je puis prendre $\frac{2 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}{2 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66 \text{ plus } 132}$, ou

$\frac{2 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}{3 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}$; d'où l'on voit que le commun diviseur devant diviser à la fois les deux termes et 132, et par conséquent les multiples de 132, doit d'abord diviser 66, et ensuite ne pas être plus grand que 66. Je divise donc le premier reste 132 par 66; le quotient est 2; donc 132 vaut 2 fois 66; donc au lieu de $\frac{2 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}{3 \text{ fois } 132 \text{ plus } 66}$, je puis écrire $\frac{2 \text{ fois } 2 \text{ fois } 66 \text{ plus } 66}{3 \text{ fois } 2 \text{ fois } 66 \text{ plus } 66}$, ou $\frac{6 \text{ fois } 66}{7 \text{ fois } 66}$, ou enfin $\frac{6}{7}$. On opéreroit de la même maniere et on raisonneroit de même pour tout autre exemple. Nous observerons seulement que, si nous avons adopté cette méthode plutôt que toute autre, c'est qu'à la derniere opération, on a la fraction toute réduite, et qu'on y voit clairement que le plus grand commun diviseur est et doit être le dernier reste.

158. Résumant donc la marche qu'on doit suivre en général, nous dirons que, pour trouver le plus grand commun diviseur des deux termes d'une fraction, il faut diviser le plus grand par le plus petit; si la division se fait sans reste, ce sera le plus petit terme, qui sera le diviseur cherché: s'il y a un reste, on divisera le plus petit terme par ce reste; et s'il n'y a pas un second reste, le premier sera le diviseur cherché; s'il y a un second reste, on divisera le premier par le second; et, s'il n'y a pas de troisieme reste, ce sera le second qui sera le diviseur demandé; sinon, on divisera le second reste par le troisieme, etc. jusqu'à ce qu'on arrive à une division sans reste. Alors le reste diviseur sera le plus grand commun diviseur cherché; et si ce reste est 1, on en conclura que la fraction est irréductible. Enfin le plus grand commun diviseur trouvé, on divisera par ce nombre les deux termes de la fraction, et les quotiens seront les termes de la fraction réduite à sa plus simple expression.

Comme ce n'étoit que pour mieux faire sentir la

démonstration de la regle, que nous avons fait subir à la fraction primitive les transformations ci-dessus, on pourra, lorsqu'on l'aura une fois bien comprise, les omettre, et opérer, comme on le voit ici, d'après la regle générale qu'on vient de donner.

462	330	330	132	132	66
1er. reste 132	1	2e. r. 66	2	3e. r. 000	2

330	66	462	66	5
000	5	000	7	7

Je divise successivement le plus grand terme 462 par le plus petit 330; ensuite 330 par le premier reste 132, puis 132 par le second reste 66 : ici le quotient est exact; j'en conclus donc que le dernier reste 66 est le plus grand commun diviseur cherché : alors je divise les deux termes de la fraction proposée 330 et 462 par 66; les quotiens sont 5 et 7; la fraction réduite est donc $\frac{5}{7}$.

Soit pris encore pour exemple $\frac{43956}{67716}$.

67716	43956	43956	23760
1er. reste 23760	1	2e reste 20196	1
23760	20196	20196	3564
3e r. 3564	1	4e. r. 2376	5
3564	2376	2376	1188
5e. reste 1188	1	6e. r. 0000	2

43956	1188	67716	1188	37
8316	37	8316	57	57
0000		0000		

On voit qu'on a été obligé ici de faire six divisions successives, pour trouver un reste qui fût un diviseur exact; mais on voit aussi qu'on pourroit se

dispenser d'écrire à chaque fois le dividende, et le reste qui ne sert qu'à multiplier le diviseur, ce qu'on peut faire aisément de mémoire. L'on pourroit donc figurer, comme ci-dessous, ces six divisions.

$$\begin{matrix} 67716 \\ 23760 \end{matrix} \left\{ \frac{43956}{20196} \right. \left\{ \frac{23760}{3564} \right. \left\{ \frac{20196}{2376} \right.$$

$$\left\{ \frac{3564}{1188} \right. \left\{ \frac{2376}{0000} \right. \left\{ \frac{1188}{} \right.$$

Voyons à présent la fraction $\frac{16637}{24257}$ qui (157) doit se réduire à $\frac{131}{191}$: en opérant, comme ci-dessus, on aura les cinq divisions suivantes à faire.

$$\begin{matrix} 24257 \\ 7620 \end{matrix} \left\{ \frac{16637}{1397} \right. \left\{ \frac{7620}{635} \right. \left\{ \frac{1397}{127} \right. \left\{ \frac{635}{000} \right. \left\{ \frac{127}{} \right.$$

$$\begin{matrix} 16637 \\ 393 \\ 127 \\ 000 \end{matrix} \left\{ \frac{127}{131} \right. \qquad \begin{matrix} 24257 \\ 1155 \\ 127 \\ 000 \end{matrix} \left\{ \frac{127}{191} \right. \qquad \left| \frac{131}{191} \right|$$

Soit enfin à réduire $\frac{69}{91}$, j'opere ainsi :

$$\frac{91}{22} \left\{ \frac{69}{3} \right. \left\{ \frac{22}{1} \right. \left\{ \frac{3}{0} \right. \left\{ \frac{1}{} \right. ,$$

où l'on voit que le dernier reste qui divise exactement est 1, d'où il suit que la fraction est irréductible.

159. Voyons à présent la maniere de réduire plusieurs fractions au même dénominateur. D'abord si l'on n'a que deux fractions, comme $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$, on voit qu'elles auront le même dénominateur, si l'on multiplie les deux termes de la premiere, par 4, dénominateur de la seconde, et les deux termes de la seconde par 3, dénominateur de la premiere; ce qui changeroit $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, qui sont égales aux pre-

mieres, puisqu'on n'a fait par là que multiplier par un même nombre les deux termes de chaque fraction primitive ; ce qui (148) n'en change pas la valeur.

Si l'on avoit trois fractions, comme $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, on voit qu'elles seront réduites au même dénominateur, si l'on multiplie 1°. les deux termes de la premiere par le produit 20 des dénominateurs 4 et 5 de la 2e. et de la 3e, ; 2°. les deux termes de la 2e par le produit 15 des dénominateurs 3 et 5 de la 1ere. et de la 3e. ; 3°. les deux termes de la 3e. , par le produit 12 des dénominateurs 3 et 4 de la 1ere. et de la 2e. : ce qui les changera en $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, et $\frac{48}{60}$. En raisonnant de même pour 4 fractions, ou 5, ou 6, etc., on peut conclure aisément cette regle générale pour réduire deux ou un tel nombre de fractions qu'on voudra, au même dénominateur. Multipliez successivement les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre, s'il n'y a que deux fractions; et s'il y en a plusieurs, par le produit des dénominateurs de toutes les autres ; on peut aussi démontrer généralement, 1°. que toutes ces fractions n'ont point changé de valeur; car on a (148) multiplié les deux termes de chacune par un même nombre : 2°. qu'elles ont toutes le même dénominateur; car chacun d'eux est le produit de tous les dénominateurs primitifs; produit qui ne change pas, (59) dans quelqu'ordre qu'on les multiplie. Voyons maintenant encore un ou deux exemples. Soit à réduire, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, et $\frac{7}{12}$ au même dénominateur, je multiplie les deux termes 1 et 2 de la premiere fraction $\frac{1}{2}$ par le produit 864 des dénominateurs 4, 3, 6, et 12 de toutes les autres ; ce qui donne $\frac{864}{1728}$. Je multiplie ensuite les deux termes 3 et 4 de la seconde par le produit 432 des autres dénominateurs 2, 3, 6, et 12; ce qui donne $\frac{1296}{1728}$; puis ceux de la troisieme par 576,

produit de 2, 4, 6 et 12; ce qui fait $\frac{1152}{1728}$; ensuite ceux de la quatrieme par 288, produit de 2 par 4, par 3 et par 12; d'où l'on tire $\frac{1440}{1728}$; enfin ceux de la derniere par le produit 144 des dénominateurs des 4 premieres; ce qui fait $\frac{1008}{1728}$. Rassemblant alors les cinq nouvelles fractions, j'ai

$$\frac{864}{1728},\quad \frac{1296}{1728},\quad \frac{1152}{1728},\quad \frac{1440}{1728},\quad \frac{1008}{1728}.$$

Soit encore $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{18}$ à réduire au même dénominateur. En multipliant successivement les deux termes de la premiere par 46656, produit de 4, 6, 9, 12 et 18; ceux de la seconde par 34992, produit de 3, 6, 9, 12 et 18; ceux de la troisieme par 23328, produit de 3, 4, 9, 12 et 18; ceux de la quatrieme par 15552, produit de 3, 4, 6, 12 et 18; ceux de la cinquieme par 11664, produit de 3, 4, 6, 9 et 18; enfin ceux de la sixieme par 7776, produit de 3, 4, 6, 9 et 12, je trouverai successivement les six nouvelles fractions :

$$\frac{93312}{139968},\quad \frac{34992}{139968},\quad \frac{116640}{139968},\quad \frac{108864}{139968},$$
$$\frac{58320}{139968},\quad \frac{7776}{139968}.$$

160. Quand le nombre des fractions est un peu considérable, au lieu de multiplier successivement les deux termes de chacune par le produit des autres dénominateurs, de la maniere dont on vient de le faire, on évitera un grand nombre de multiplications superflues, par la méthode suivante. Après avoir trouvé la premiere fraction par la regle ordinaire, on divisera son dénominateur nouveau successivement par les dénominateurs des autres, et on multipliera alors chaque numérateur par le quotient respectif. Quant aux dénominateurs, on se dispen-

sera de les multiplier par ce quotient, puisqu'ils doivent tous être les mêmes.

Pour appliquer ceci à un exemple, reprenons les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{12}$. Après avoir trouvé la premiere fraction $\frac{864}{1728}$, je divise 1728 par 4 dénominateur de la seconde; le quotient est 432, par lequel je multiplie son numérateur 3. J'ai 1296; et comme le dénominateur commun doit être 1728, j'écris $\frac{1296}{1728}$. Ensuite divisant 1728 par 3 dénominateur de la troisieme, le quotient est 576, par lequel je multiplie le numérateur 2; ce qui me donne 1152, et par conséquent $\frac{1152}{1728}$: puis divisant 1728 par le dénominateur 6 de la quatrième, et multipliant le quotient 288 par le numérateur 5, j'ai $\frac{1440}{1728}$ pour valeur de cette fraction: enfin 1728 divisé par 12, donne 144 qui, multiplié par 7, fait 1008; j'ai donc $\frac{1008}{1728}$ pour la cinquieme, c'est-à-dire, par-tout les mêmes fractions que ci-dessus.

161. La méthode abrégée, que nous venons d'exposer, s'adapte à tous les cas. Il est encore d'autres abréviations moins générales, il est vrai, mais essentielles par les simplifications qu'elles mettent dans les calculs. Soit d'abord proposé de réduire au même dénominateur, deux fractions dont les dénominateurs soient multiples d'un même nombre, comme $\frac{7}{8}$ et $\frac{5}{12}$ dont les dénominateurs ne sont autre chose que 2 fois 4, et 3 fois 4; je vois que si je multiplie le premier 8 par 3, et le second 12 par 2, j'aurai le même dénominateur 24. Donc, lorsque les dénominateurs de deux fractions seront des multiples d'un même nombre, il suffira de multiplier les deux termes de chacune par le quotient du dénominateur de l'autre, divisé par le facteur commun. Ainsi pour $\frac{7}{8}$ et $\frac{5}{12}$, je multiplie 7 et 8 par 3 quotient de 12 par 4, facteur commun des deux dénominateurs. Ensuite je multiplie 5 et 12 par 2 quotient

de 8 par 4 : et j'ai les deux fractions $\frac{21}{24}$ et $\frac{10}{24}$ plus simples que $\frac{84}{96}$ et $\frac{40}{96}$ qu'auroit données, la méthode ordinaire, et qui sont cependant les mémes, comme on peut s'en assurer, en divisant par 4 les deux termes de chacune de ces deux dernieres.

Si l'on avoit à réduire au méme dénominateur, trois fractions de cette espece, comme $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$ et $\frac{3}{20}$, dont les dénominateurs sont 2 fois 4, 3 fois 4 et 5 fois 4, il est aisé de voir qu'en multipliant le premier 8 par 3 fois 5, le second 12 par 2 fois 5, et le troisieme 20 par 2 fois 3, on aura également 120. Si l'on avoit quatre fractions, comme $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{20}$ et $\frac{13}{28}$ dont les dénominateurs sont 2 fois 4, 3 fois 4, 5 fois 4 et 7 fois 4 ; on voit encore que le dénominateur seroit par-tout le méme, en multipliant le premier 8 par le produit de 3 par 5 et par 7 ; le second 12 par le produit de 2 par 5 et par 7 ; le troisieme 20 par le produit de 2 par 3 et par 7 ; et enfin le quatrieme 28 par le produit de 2 par 3 et par 5 ; car on aura par-tout 840. D'après cet exemple, et d'après la regle abrégée (160) on voit qu'en général, pour réduire au méme dénominateur plusieurs fractions, dont les dénominateurs sont le produit d'un méme nombre par des facteurs quelconques, il faut multiplier les deux termes de la premiere, par le produit des facteurs des autres dénominateurs, ensuite multiplier successivement les numérateurs des autres fractions, par le produit des facteurs de tous les autres dénominateurs, et enfin donner aux nouveaux numérateurs le méme dénominateur que la premiere. Ainsi pour $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{20}$ et $\frac{13}{28}$; d'abord je multiplie les deux termes 7 et 8 de la premiere par le produit 105 des facteurs 3, 5 et 7 des trois autres fractions ; ce qui fait $\frac{735}{840}$. Ensuite je multiplie successivement les numérateurs 5, 3 et 13 par les produits 70, 42, et 30 de 2 par 5 et par 7,

de 2 par 3 et par 7, et enfin de 2 par 3 et par 5; ce qui donne pour nouveaux numérateurs 350, 126 et 390, auxquels je donne 840 pour dénominateurs : et j'ai les 4 fractions $\frac{735}{840}$, $\frac{350}{840}$, $\frac{126}{840}$, $\frac{390}{840}$ égales respectivement à $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{13}{28}$.

162. Si l'on avoit plusieurs fractions dont le plus haut dénominateur fût multiple de tous les autres, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ déjà traitées (159), où 12 est à la fois multiple de 2, de 4, de 3, et de 6, on voit qu'en multipliant le premier dénominateur 2 par 6, le second 4 par 3, le troisieme 3 par 4, et le quatrieme 6 par 2, on auroit par-tout 12. On voit donc que la maniere la plus simple dans ce cas, est de diviser successivement le plus haut dénominateur par celui de chaque fraction, dont on multipliera le numérateur par ce quotient, et de donner ensuite pour dénominateur à chaque fraction le plus haut dénominateur. Ainsi, dans l'exemple précédent, je divise 12 successivement par les dénominateurs 2, 4, 3 et 6; et multipliant les numérateurs respectifs par les quotiens 6, 3, 4 et 2, j'ai pour nouveaux numérateurs 6, 9, 8, et 10, auxquels donnant 12 pour dénominateur, j'ai les cinq nouvelles fractions $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{7}{12}$, bien autrement simples que $\frac{864}{1728}$, $\frac{1296}{1728}$, $\frac{1152}{1728}$, $\frac{1440}{1728}$ et $\frac{1008}{1728}$, et qui dans le fond sont égales à celles-ci, comme on peut aisément s'en assurer, en divisant tous les termes de ces dernieres par 144. Il pourroit se faire que le plus haut dénominateur ne fût pas multiple des autres; alors il suffiroit quelquefois d'un léger changement pour le rendre tel. Ainsi soient encore les 6 fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{12}$ et $\frac{1}{18}$ (159); je vois que si, au lieu de $\frac{1}{18}$, j'écrivois $\frac{2}{36}$, alors 36 seroit multiple à la fois de 3, 4, 6, 9 et 12. Opérant donc alors absolument, comme on vient de le faire, on auroit les 6 nouvelles fractions $\frac{24}{36}$, $\frac{9}{36}$, $\frac{30}{36}$, $\frac{28}{36}$, $\frac{15}{36}$ et $\frac{2}{36}$, qui ne sont autre

Digitized by Google

chose que les fractions $\frac{93312}{139968}$, $\frac{34992}{139968}$, etc. dont tous les termes seroient divisés par 3888.

163. Nous sommes présentement en état de pratiquer sur les fractions, toutes les regles de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division. Et d'abord nous avertissons que, dans tous les exemples que nous donnerons, pour l'application de ces différentes regles, les fractions seront réduites à leur plus simple expression : si on proposoit des exemples où elles ne le fussent pas, on commenceroit par les y réduire, au moyen de l'une des méthodes que nous avons données. Cela posé, voyons d'abord l'addition des fractions.

Si les fractions proposées ont le même dénominateur ; s'il falloit, par exemple, ajouter $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{9}$ et $\frac{2}{9}$, on voit tout de suite qu'il ne faut, pour cela, qu'ajouter tous les numérateurs ; ce qui donne 14 ; et par conséquent pour la somme cherchée, $\frac{14}{9}$, et (145) en extrayant les entiers, $1\frac{5}{9}$. Si les fractions proposées n'avoient pas le même dénominateur, on commenceroit par les y réduire ; ensuite on ajouteroit tous les numérateurs, et si la somme surpassoit le dénominateur commun, on la diviseroit par ce dénominateur ; le quotient seroit les entiers que contiendroit la somme, et du reste on feroit le numérateur d'une fraction, qui auroit le dénominateur commun pour dénominateur. S'agit-il, par exemple, d'ajouter $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$, je les réduis au même dénominateur, ce qui les change en $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$ et $\frac{48}{60}$: j'ajoute 40, 45, et 48 ; la somme est 133 ; donc la somme des trois fractions fait $\frac{133}{60}$: enfin, extrayant les entiers, j'ai $2\frac{13}{60}$, pour la somme cherchée.

Si les fractions pouvoient se réduire au même dénominateur, par l'une des méthodes abrégées ci-dessus, il ne faudroit pas manquer de s'en servir. Si l'on donnoit, par exemple, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{18}$ et $\frac{25}{36}$, où 36

est multiple des dénominateurs 3, 9 et 18, je divise (162) 36 successivement par 3, 9 et 18, et multipliant les quotiens 12, 4 et 2 par les numérateurs respectifs 2, 7 et 5; j'ai les 4 nouvelles fractions $\frac{24}{36}$, $\frac{28}{36}$, $\frac{10}{36}$, $\frac{25}{36}$. Alors ajoutant les numérateurs, la somme est 87. Toutes ces fractions valent donc $\frac{87}{36}$ ou $2\frac{15}{36}$, ou enfin $2\frac{5}{12}$, en divisant par 3 les deux termes de $\frac{15}{36}$. De même, si l'on avoit $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{20}$ et $\frac{9}{28}$, dont les dénominateurs valent 2 fois 4, 3 fois 4, 5 fois 4, et 7 fois 4; j'aurois (161) pour dénominateur commun, le produit de 4 par 2, par 3, par 5 et par 7, ou 840, et les numérateurs seroient 315, 350, 294, et 270 dont la somme fait 1229, que je divise par 840, ce qui donne $1\frac{389}{840}$.

Si l'on avoit à ajouter des entiers joints à des fractions, on ajouteroit d'abord les fractions à l'ordinaire, et après avoir extrait les entiers renfermés dans leur somme, on les ajouteroit aux entiers donnés. Soient par exemple, les nombres $2\frac{3}{4}$, $5\frac{2}{3}$, $8\frac{4}{5}$; je réduis d'abord $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ au même dénominateur, et j'ai $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$ et $\frac{48}{60}$; alors ajoutant ces fractions, j'ai $2\frac{13}{60}$; et ajoutant les 2 entiers à 2, 5 et 8, j'ai pour somme totale $17\frac{13}{60}$.

164. Il arrive souvent, et on en verra des exemples dans la multiplication des nombres complexes, que les fractions qu'on doit ajouter, suivent une certaine loi; qu'elles soient telles, par exemple, que le dénominateur de chacune soit le produit du dénominateur précédent par un nombre quelconque. Alors il est utile d'avoir une regle qui donne, de la maniere la plus expéditive, la somme de toutes ces fractions. Voici cette regle, appliquée à un exemple. Soit proposé d'ajouter les fractions suivantes; $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{25}{72}$, $\frac{37}{216}$, $\frac{259}{1080}$, et supposons qu'on sache de plus, que le second dénominateur est le produit du premier par 2; le troisieme, le

produit du second par 2 ; le quatrieme, le produit du troisieme par 3 ; le cinquieme, le produit du quatrieme par 2 ; le sixieme, le produit du cinquieme par 3 ; enfin le septieme, le produit du sixieme par 5 : alors je multiplie le premier numérateur 2 par le premier facteur 2, et au produit 4 j'ajoute le second numérateur 5 ; j'ai pour somme 9 ; dont j ôte le second dénominateur 6 : il reste 3, et j'écris 1 à part. Je multiplie le reste 3 par le second facteur ; ce qui donne 6, auquel j'ajoute le troisieme numérateur 7 ; la somme est 13, dont j'ôte le troisieme dénominateur 12 ; le reste est 1, et j'écris encore 1 à part. Je multiplie le reste 1 par le troisieme facteur, et j'ai 3 auquel j'ajoute le quatrieme numérateur 11 ; la somme n'est que 14, dont je ne puis ôter le quatrieme dénominateur 36 ; je multiplie 14 par le quatrieme facteur 2, et à 28 j'ajoute le cinquieme numérateur 25, ce qui fait 53, dont je ne puis ôter le cinquieme dénominateur 72. Je multiplie 53 par le cinquieme facteur 3, et j'ai 159, auquel j'ajoute le sixieme numérateur 37, et la somme fait 196, dont je ne puis ôter le septieme dénominateur 216 ; enfin multipliant 196 par le dernier facteur 5, j'ai 980, auquel ajoutant le dernier numérateur 259, j'ai 1239, dont ôtant le dernier dénominateur 1080, le reste est 159 ; et retenant un entier, je l'ajoute aux deux déja retenus. La somme est donc 3 avec le reste $\frac{159}{1080}$ ou $\frac{53}{360}$, en divisant les deux termes de la premiere par 3.

On sentira aisément la raison des opérations précédentes, en les comparant aux opérations suivantes, dont celles-là ne sont que l'abrégé, et dont chacune porte évidemment sa démonstration avec elle. En effet, je peux multiplier les deux termes de $\frac{2}{3}$ par 2 (148) ; ce qui me donne $\frac{4}{6}$ qui, ajoutés avec $\frac{5}{6}$ font $\frac{9}{6}$, ou $\frac{6}{6}$ plus $\frac{3}{6}$, ou 1 $\frac{3}{6}$; je puis à présent multiplier les deux termes de $\frac{3}{6}$ par 2, ce qui donne

$\frac{8}{12}$ qui, avec $\frac{7}{12}$, font $\frac{13}{12}$ ou 1 plus $\frac{1}{12}$; multipliant 1 et 12 par 3, j'ai $\frac{3}{36}$ et $\frac{11}{36}$ qui font $\frac{14}{36}$; qui, en multipliant 14 et 36 par 2, donnent $\frac{28}{72}$ et qui, avec $\frac{25}{72}$ font $\frac{53}{72}$ ou $\frac{159}{216}$ en multipliant 53 et 72 par 3. Ajoutant $\frac{159}{218}$ et $\frac{37}{218}$, j'ai $\frac{196}{216}$, dont les termes multipliés par 5 font $\frac{980}{1080}$ qui, avec $\frac{259}{1080}$, font $\frac{1239}{1080}$, ou 1 plus $\frac{159}{1080}$. J'ai donc en tout 3 entiers plus $\frac{159}{1080}$, ou $\frac{53}{360}$, comme ci-dessus.

165. Si l'on avoit deux suites de fractions, formées d'après une loi différente, on les ajouteroit séparément, comme on vient de le voir, et la somme se réduiroit alors à trouver celle de deux fractions. Si par exemple on avoit à ajouter ces deux suites de fractions;

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{11}{36}, \frac{25}{72}, \frac{37}{218}, \frac{259}{1080} \text{ et } \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{11}{30}, \frac{19}{90}, \frac{329}{540},$$

dont la premiere est la même que ci-dessus; et dont la seconde est telle, que chaque dénominateur, à commencer du second, est successivement le produit du précédent par 2, 3, 3 et 6. Je commence par chercher la somme de la premiere suite, qui est 3 $\frac{53}{360}$; pour trouver la somme de la seconde, je dis: 2 fois 3 font 6, et 7 font 13, dont j'ôte 10, il reste 3, et je pose 1 à part puis 3 fois 3 font 9, et 11 font 20, plus petit que 30; multipliant donc 20 par 3, j'ai 60, auquel ajoutant 19, j'ai 79, plus petit encore que son dénominateur 90; multipliant donc enfin 79 par 6, et ajoutant 329 au produit, j'ai 803, dont ôtant 540, il reste 263, et je retiens 1, qui, avec le premier, forme pour somme totale 2 plus $\frac{263}{540}$; alors je n'aurois plus qu'à ajouter les deux sommes 3 $\frac{53}{360}$ et 2 $\frac{263}{540}$. Or le premier dénominateur vaut 2 fois 180; et le second, 3 fois 180: il suffit donc de multiplier le premier numérateur par 3 et le second par 2, ce qui donnera 159 et 526, pour nouveaux numérateurs, auxquels on donnera pour dénomi-

nateur commun le produit de 180 par 2 et par 3, ou 1080 : ajoutant alors les deux numérateurs, on aura 685, et par conséquent $\frac{685}{1080}$ ou $\frac{137}{216}$, pour la somme des deux fractions $\frac{53}{360}$ et $\frac{263}{540}$: ajoutant enfin à cette somme, celle des entiers, on aura pour la somme des deux suites données 5 entiers, plus $\frac{137}{216}$.

On auroit pu faire aussi cette addition en une fois, parce qu'il se trouve par hasard que 1080, le plus grand des dénominateurs, est multiple de tous ceux des deux suites. Divisant donc (162) 1080 successivement par tous les dénominateurs, et multipliant les numérateurs par chaque quotient respectif, on auroit eu à ajouter les nombres 720, 900, 630, 330, 375, 185, 259 et 648, 756, 396, 228, 658; dont la somme 6085, divisée par 1080, donne 5 plus $\frac{685}{1080}$, ou 5 plus $\frac{137}{216}$, comme ci dessus.

166. Passons à la soustraction des fractions. D'abord il est clair que si elles ont le même dénominateur, que si, par exemple, on avoit $\frac{1}{9}$ à soustraire de $\frac{4}{9}$, le reste seroit $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$. D'où il suit qu'il suffit, pour opérer cette regle, de réduire les fractions au même dénominateur, si elles n'y sont pas déjà; de retrancher ensuite les numérateurs l'un de l'autre, et enfin de donner au reste, pour dénominateur, le dénominateur commun. Veut-on donc soustraire $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$? On les changera d'abord en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; puis retranchant 8 de 9, on aura pour reste 1, et par conséquent $\frac{1}{12}$. Si les fractions ont pour dénominateurs des multiples d'un même nombre, on se servira de la regle abrégée (161) : soit par exemple $\frac{5}{12}$ à ôter de $\frac{7}{8}$; je les change en $\frac{10}{24}$ et $\frac{21}{24}$; ôtant alors 10 de 21, j'ai 11 pour reste; le reste demandé est donc $\frac{11}{24}$. Enfin si j'avois la somme de plusieurs fractions, à soustraire de la somme de plusieurs autres, par exemple la seconde suite ci-dessus, dont la somme est 2 $\frac{263}{540}$ à ôter de la premiere qui vaut 3 $\frac{53}{360}$; je les changerois

changerois (165) en $2\,\frac{526}{1080}$ et $3\,\frac{159}{1080}$. Mais comment alors ôter $\frac{526}{1080}$ de $\frac{159}{1080}$, puisque 526 est plus grand que 159, dont on doit cependant le soustraire? Pour lever cette difficulté, je préleve sur les entiers 3 une unité, qui vaut $\frac{1080}{1080}$ (145. 2°.); auxquels ajoutant 159, j'ai $\frac{1239}{1080}$, dont je puis ôter $\frac{526}{1080}$; il me reste $\frac{713}{1080}$: alors ôtant les entiers les uns des autres, ou 2 de 2, et non de 3, à cause de l'unité empruntée, le reste total est o entier plus $\frac{713}{1080}$. On trouveroit de même que $3\,\frac{4}{7}$ ôtés de $12\,\frac{1}{6}$, donnent pour reste $8\,\frac{25}{42}$, en réduisant $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{6}$ en $\frac{24}{42}$ et $\frac{7}{42}$; puis en décomposant $12\,\frac{7}{42}$ en 11 plus $\frac{49}{42}$, ensuite en retranchant $\frac{24}{42}$ de $\frac{49}{42}$, et 3 de 11, ce qui fait $8\,\frac{25}{42}$.

167. Supposons présentement qu'on ait deux fractions à multiplier l'une par l'autre, $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, par exemple : on voit que cela revient à prendre les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$, ou 5 fois le septieme de $\frac{3}{4}$; d'où il suit qu'il faut d'abord diviser $\frac{3}{4}$ par 7, ce qui se fait (148. 2°.) en multipliant le dénominateur 4 par 7, et ensuite multiplier le quotient $\frac{3}{28}$ par 5, ce qui se fait (148. 1°) en multipliant le numérateur 3 par 5, d'où l'on tire pour la *fraction-produit* $\frac{15}{28}$. Si l'on avoit eu au contraire $\frac{5}{7}$ à multiplier par $\frac{3}{4}$, il eût fallu prendre 3 fois le quart de $\frac{5}{7}$; il eût donc fallu diviser $\frac{5}{7}$ par 4, ce qu'on eût fait en multipliant le dénominateur 7 par 4, et ensuite multiplier le produit $\frac{5}{28}$ par 3, ce qui seroit revenu à multiplier le numérateur 5 par 3, et ce qui eût encore donné pour fraction-produit $\frac{15}{28}$. En raisonnant de même pour tout autre cas, on voit, 1°. que pour multiplier ensemble deux fractions, il faut multiplier numérateur par numérateur, et ensuite dénominateur par dénominateur; ce qui donnera deux produits, dont le premier sera le numérateur, et le second le dénominateur de la fraction-produit ; 2°. que la fraction-produit ne change pas dans quelqu'ordre qu'on multiplie les fractions produisantes; et 3°. que la fraction-pro-

duit est plus petite que chacune des fractions primitives; ce qui est évident, puisqu'elles sont plus petites que l'unité, et que le produit de l'une d'elles, par l'unité, ne donneroit que cette fraction même pour produit. Voici quelques exemples : $\frac{3}{7}$ multiplié par $\frac{5}{11}$, ou $\frac{5}{11}$ par $\frac{3}{7}$ donnent $\frac{15}{77}$: $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{4}$, ou $\frac{3}{7}$ par $\frac{4}{5}$, donnent $\frac{12}{20}$, qui se réduit à $\frac{3}{5}$. Sur quoi nous observerons que quand le numérateur d'une fraction produisante et le dénominateur de l'autre seront égaux, il sera plus court de les supprimer. Ainsi si j'avois $\frac{4}{5}$ à multiplier par $\frac{3}{4}$, j'observe que 4 est numérateur de l'une de ces fractions, et dénominateur de l'autre; je les supprime donc, et j'écris pour produit $\frac{3}{5}$, comme ci-dessus : la raison de cet abrégé est évidente; car le numérateur de la fraction-produit seroit, en faisant la regle tout au long, 4 fois 3, et le dénominateur seroit 5 fois 4; or, (148. 3°.) une fraction ne change pas, en divisant ses deux termes par un même nombre; on peut donc écrire simplement $\frac{3}{5}$ en supprimant le facteur commun 4. On peut aussi raisonner ainsi : multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre 3 fois le quart de $\frac{4}{5}$; or, le quart de $\frac{4}{5}$ est évidemment $\frac{1}{5}$, et 3 fois $\frac{1}{5}$ font $\frac{3}{5}$. Il n'est pas même nécessaire, pour abréger la regle, que l'un des numérateurs et des dénominateurs soient égaux; il suffit qu'ils soient multiples d'un même facteur; alors on commenceroit, avant de pratiquer la regle, par supprimer ce facteur. Exemple. Soit à multiplier $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$, je vois que 4 et 2 sont 2 fois 2 et 1 fois 2 : supprimant donc ce facteur, je n'ai plus à multiplier que $\frac{1}{5}$ par $\frac{3}{2}$, ce qui fait $\frac{3}{10}$. On peut aisément sentir la raison de cette regle, en observant que $\frac{2}{5}$ valent $\frac{4}{10}$, et que les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{10}$ reviennent à prendre 3 fois le quart de $\frac{4}{10}$; or le quart de $\frac{4}{10}$ est de $\frac{1}{10}$; et 3 fois $\frac{1}{10}$ valent $\frac{3}{10}$. En raisonnant et opérant d'une maniere analogue, on verra que

1°. $\frac{9}{11}$ par $\frac{7}{9}$ fait $\frac{7}{11}$; 2°. $\frac{32}{63}$ par $\frac{7}{16}$ fait $\frac{2}{9}$;
3°. $\frac{5}{12}$ par $\frac{6}{25}$ fait $\frac{1}{10}$, etc.

168. Si l'on avoit à prendre les $\frac{2}{3}$ des $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$ (on appelle *fractions de fractions* une suite de fractions, ainsi séparées par les articles *les, des, de*), on voit qu'il ne s'agit que de prendre d'abord les $\frac{5}{7}$ de $\frac{3}{4}$, ou de multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui donneroit $\frac{15}{28}$; et ensuite de prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{15}{28}$, ou de multiplier $\frac{15}{28}$ par $\frac{2}{3}$, ce qui donne (167) $\frac{5}{14}$. Si l'on avoit multiplié dans tout autre ordre, par exemple, d'abord $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, et ensuite le produit $\frac{1}{2}$ (167) par $\frac{5}{7}$, on auroit eu encore $\frac{5}{14}$. D'où l'on peut conclure que, quelque nombre de fractions de fractions que l'on ait, si un ou plusieurs numérateurs sont égaux à un ou plusieurs dénominateurs, on pourra les effacer; et que si de part et d'autre, il n'y avoit que des facteurs communs, on pourroit les supprimer. C'est ainsi que les $\frac{2}{3}$ des $\frac{4}{5}$ des $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ se réduisent à $\frac{1}{3}$, en supprimant haut et bas les termes 3, 4 et 5 communs, et en réduisant 2 et 6 à 1 et 3, à cause du facteur commun 2; ce dont on peut aisément se convaincre de la maniere suivante. Puisqu'on peut multiplier ces fractions dans l'ordre que l'on veut, on peut donc supposer qu'on ait à prendre les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$; or d'abord le cinquieme de $\frac{5}{6}$ est $\frac{1}{6}$; donc les $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ sont $\frac{4}{6}$; ensuite le quart de $\frac{4}{6}$ est $\frac{1}{6}$; donc les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{6}$ sont $\frac{3}{6}$; enfin le tiers de $\frac{3}{6}$ est $\frac{1}{6}$; les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{6}$ sont donc $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$.

169. Si l'on avoit à multiplier un entier par une fraction, ou une fraction par un entier, on rameneroit ces deux cas au cas ordinaire, en donnant à cet entier l'unité pour dénominateur; ainsi $\frac{3}{4}$ multiplié par 5, revient à $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, ou à $\frac{15}{4}$, ou enfin à $4\frac{3}{4}$. De même 5 par $\frac{3}{4}$ revient à $\frac{5}{1}$ par $\frac{3}{4}$, ou à $4\frac{3}{4}$, comme ci-dessus. $\frac{3}{4}$ multiplié par 4, revient à $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{1}$, c'est-à-dire, à $\frac{3}{1}$ ou 3, en supprimant le 4. On voit donc que, dans le cas dont il s'agit, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par l'entier.

170. Enfin s'il s'agissoit de multiplier des entiers joints à des fractions, soit par des entiers, soit par des entiers joints aussi à des fractions, on commenceroit (145. 4°) par réduire ces entiers en fract. de même espece que celle qui les accompagne; et alors la regle seroit ramenée à l'une de celles ci-dessus: ainsi soit $2\frac{3}{4}$ à multiplier par 6; je réduis $2\frac{3}{4}$ à $\frac{11}{4}$; alors, multipliant le numérateur 11 par 6, j'ai pour produit $\frac{66}{4}$ ou $\frac{33}{2}$, ou $16\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{11}$ par 11, revient à $\frac{36}{11}$ par 11, ou à 36. Si j'avois à présent $2\frac{3}{4}$ à multiplier par $6\frac{3}{11}$, je changerois les facteurs en $\frac{11}{4}$ et $\frac{69}{11}$; et le produit seroit $\frac{69}{4}$ ou $17\frac{1}{4}$. On pourroit aussi trouver ce produit d'une autre maniere. En effet, on voit que l'opération se réduit à prendre d'abord 6 fois $2\frac{3}{4}$, et ensuite 3 fois le onzieme de $2\frac{3}{4}$. Or 6 fois $2\frac{3}{4}$ reviennent à prendre 6 fois 2 et 6 fois $\frac{3}{4}$; or 6 fois $\frac{3}{4}$ font $\frac{18}{4}$; ou $4\frac{2}{4}$ et 6 fois 2 font 12: donc 6 fois $2\frac{3}{4}$ font $16\frac{2}{4}$; de plus $2\frac{2}{4}$ faisant $\frac{11}{4}$, le 11e de $\frac{11}{4}$ est $\frac{1}{4}$; donc les $\frac{3}{11}$ font $\frac{2}{4}$, qui, joints à $16\frac{2}{4}$, donnent $17\frac{1}{4}$, comme on l'avoit déjà.

171. Soient en dernier lieu deux fractions à diviser l'une par l'autre, $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, par exemple: Si je réduis ces fractions au même dénominateur, elles deviendront $\frac{21}{28}$ et $\frac{20}{28}$; or $\frac{21}{28}$ contient $\frac{20}{28}$, comme 21 contient 20; le quotient est donc $\frac{21}{20}$ ou $1\frac{1}{20}$. Si j'avois eu au contraire $\frac{3}{7}$ à diviser par $\frac{5}{4}$, ou $\frac{20}{28}$ par $\frac{21}{28}$, le quotient eût été $\frac{20}{21}$. Si dans ces exemples on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée, c'est-à-dire, ou $\frac{3}{4}$ par $\frac{7}{3}$, ou $\frac{5}{7}$ par $\frac{4}{3}$, on aura les mêmes fractions-quotiens que ci-dessus, c'est-à-dire, $\frac{21}{20}$ ou $1\frac{1}{20}$ et $\frac{20}{21}$. En raisonnant de même pour tout autre cas, on voit 1°. que pour diviser deux fractions l'une par l'autre, il faut multiplier la fraction dividende, par la fraction diviseur renversée; 2°. qu'il n'en est pas de même pour la division des fractions que pour leur multiplication; car dans celle-ci (167), le produit ne change pas, dans quelqu'ordre qu'on multiplie, au lieu que, dans celle-là,

le quotient varie ; mais on voit en même temps, qu'il n'est dans un cas, que l'inverse de ce qu'il étoit dans l'autre ; d'où il suit que, connoissant le quotient $\frac{21}{20}$, de $\frac{3}{4}$ divisé par $\frac{5}{7}$, on peut conclure que celui de $\frac{5}{7}$ par $\frac{3}{4}$, sera $\frac{20}{21}$; 3°. enfin, que la fraction-quotient est toujours plus grande que chacune des fractions primitives, ce qui est évident : car puisqu'en divisant l'une ou l'autre par l'unité, on auroit cette fraction même pour quotient, il s'ensuit, qu'en divisant par un nombre plus petit que l'unité, on doit avoir un quotient plus grand. Voyons quelques exemples de divisions : $\frac{3}{7}$ divisés par $\frac{6}{11}$ font $\frac{33}{42}$ ou $\frac{11}{14}$: $\frac{7}{9}$ divisés par $\frac{6}{9}$ font $\frac{7}{6}$; en supprimant le dénominateur commun (170) : de plus, puisque la division des fractions se change en multiplication, en renversant la fraction diviseur, on voit qu'on peut leur appliquer les abréviations de l'article 167 ; c'est-à-dire, que si les numérateurs ou les dénominateurs sont égaux, on les effacera, et s'ils ont des facteurs égaux, on les supprimera. Ainsi, $\frac{4}{7}$ divisé par $\frac{8}{21}$ donne $\frac{3}{2}$ ou 1 $\frac{1}{2}$. $\frac{8}{11}$ divisé par $\frac{16}{33}$ font encore $\frac{3}{2}$ ou 1 $\frac{1}{2}$. Enfin, $\frac{7}{12}$ divisé par $\frac{7}{36}$ vaut 3.

172. Si l'on avoit une fraction à diviser par un entier, ou un entier par une fraction, comme $\frac{3}{4}$ par 5, on écriroit $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{1}$; le quotient seroit donc $\frac{3}{20}$. Si au contraire on eût eu 5 à diviser par $\frac{3}{4}$, le quotient eût été $\frac{20}{3}$ ou 6 $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ divisé par 3 donneroit $\frac{1}{4}$, et 3 divisé par $\frac{3}{4}$ donneroit 4.

173. Enfin si l'on avoit à diviser des entiers joints à des fractions, soit par des entiers, soit par des entiers joints aussi à des fractions, on réduiroit les entiers en fractions. Ainsi, 2 $\frac{3}{4}$ divisé par 7, se changeroit en $\frac{11}{4}$ divisé par $\frac{7}{1}$, ce qui donneroit $\frac{11}{28}$: 3 $\frac{1}{5}$ divisé par 8 devient $\frac{16}{5}$ divisé par $\frac{8}{1}$ ou $\frac{2}{5}$. Si j'avois 7 $\frac{1}{3}$ à diviser par 2 $\frac{3}{4}$, je les changerois en $\frac{22}{3}$ et $\frac{11}{4}$; et divisant, j'ai, à cause du facteur commun aux

numérateurs, $\frac{8}{3}$ ou $2\frac{2}{3}$. Si on avoit à diviser $7\frac{3}{4}$ par $2\frac{7}{12}$, en réduisant en fractions, on auroit $\frac{31}{4}$ à diviser par $\frac{31}{12}$ ou $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{12}$, ou enfin 3 pour quotient.

174. Comme, dans la suite, nous aurons besoin, pour réduire les unes aux autres les anciennes et les nouvelles unités, de savoir réduire de même, les fractions décimales et ordinaires, nous allons finir les fractions par cette théorie, sur laquelle d'ailleurs (128) nous avons promis de revenir. On a vu qu'on pouvoit toujours réduire une fraction ordinaire en fraction décimale, en mettant à la suite du dividende, c'est-à-dire, du numérateur, un nombre de zéros égal à celui des chiffres décimaux, qu'on vouloit avoir au quotient. Ainsi pour réduire $\frac{3}{4}$ en décimales, on a divisé 300 par 4, ce qui a donné 75, et par conséquent, 0, 75 pour le quotient cherché: Pour réduire en décimales $\frac{5}{8}$, on a divisé 5000 par 8, et le quotient a été 625, et ensuite 0,625.

Donc réciproquement, pour réduire en fraction ordinaire, une fraction décimale de l'espece ci-dessus, on la regardera comme une fraction ordinaire, et on cherchera le plus grand commun diviseur de ses deux termes: ainsi 0,75 ou $\frac{75}{100}$ se réduira à $\frac{3}{4}$, en divisant ses deux termes 75 et 100 par 25: 0,625 ou $\frac{625}{1000}$ se réduira à $\frac{5}{8}$, en divisant ses deux termes par 125: enfin 0,1875 ou $\frac{1875}{10000}$ se réduira à $\frac{3}{16}$ en divisant 1875 et 10000 par 625.

175. Il est une infinité de cas où, en voulant réduire une fraction ordinaire en fraction décimale, l'on ne parviendroit jamais à un quotient sans reste, quelque nombre de zéros qu'on mît à la suite du dividende. Par exemple, à commencer par $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$, on trouveroit ou 0, 333... ou 0, 666... avec les restes ou 1 ou 2, qui reviendroient sans cesse; de même $\frac{3}{11}$ donneroit 0, 272727.... avec les restes

alternatifs 8 et 3. Ces sortes de fractions s'appellent *fractions périodiques*, parce qu'on y voit toujours reparoître la même *période* de chiffres. Cela posé, il est clair, 1°. que la période ne peut avoir qu'autant de chiffres, moins un, que le dénominateur a d'unités : En effet, d'un côté, le retour de la période doit avoir lieu, dès qu'on trouvera un reste égal à l'un de ceux qu'on a déjà trouvés ; et de l'autre, le reste ne peut être compris qu'entre l'unité inclusivement, et le dénominateur exclusivement. Si par exemple, on réduit $\frac{4}{13}$ en décimales, on aura o, 307692, avec le reste 4 qui, étant égal au dividende 4, annonce le retour de la période ; et si on réduit $\frac{6}{17}$ en décimales, on ne retrouvera le dividende 6, qu'après avoir trouvé au quotient les seize chiffres suivans ; o,3529411764705882 ; 2°. qu'il existe des fractions périodiques de toute espece ; car les unes peuvent être ou d'un chiffre, comme o, 3333... qui est égale à $\frac{1}{3}$, ou de deux chiffres, comme o, 2727.... égale à $\frac{3}{11}$, ou de trois chiffres, comme o, 189189... égale à $\frac{7}{37}$, et ainsi de suite ; et les autres pourront être composées, en partie d'abord d'un nombre de chiffres quelconque, et ensuite en partie d'une fraction périodique, comme o, 1666.... égale à $\frac{1}{6}$, ou o, 52|272727 égale à $\frac{23}{44}$, etc. Pour distinguer ces deux sortes de fractions périodiques, j'ajouterai aux secondes le mot *mixtes*. Cela posé, voyons comment on peut réduire toute fraction périodique en une fraction ordinaire.

176. Il nous suffira, pour établir cette réduction, de considérer la premiere des fractions périodiques, ou $\frac{1}{3}$, que nous savons valoir o, 3333... ; en effet, si l'on prend le tiers de ces deux quantités égales, on voit que o, 1111... vaut $\frac{1}{9}$; donc o, 2222.... vaudra $\frac{2}{9}$, etc. Donc, pour exprimer en fraction ordinaire, une fraction périodique d'un chiffre, il faut donner ce chiffre pour numérateur à la fraction, et 9

pour dénominateur : ainsi, 0, 7777... vaut $\frac{7}{9}$. Pour réduire celles de deux chiffres, je prends le 33e de $\frac{1}{3}$, et de son égal 0, 3333..., et j'ai $\frac{1}{99}$ égal à 0, 010101... Donc, 0, 070707...., par exemple, égale $\frac{7}{99}$ et 0, 373737.... vaut $\frac{37}{99}$, etc. Donc, on réduira toute fraction périodique de deux chiffres en fraction ordinaire, en prenant ces chiffres pour numérateur, et 99 pour dénominateur. De même, prenant le 333e de $\frac{1}{3}$ et de 0, 3333..., j'ai $\frac{1}{999}$ égal à 0, 001001...., d'où il suit que 0, 008008.... 0, 041041... 0, 371371... etc. valent respectivement $\frac{8}{999}$, $\frac{41}{999}$, $\frac{371}{999}$, etc. Donc, pour réduire en fraction ordinaire toute fraction périodique de trois chiffres, il faut prendre ces chiffres pour numérateur, et 999 pour dénominateur. En raisonnant de même pour les fractions périodiques de quatre chiffres, de cinq chiffres, etc. on voit qu'en général, pour réduire en fraction ordinaire, une fraction périodique de tant de chiffres qu'on voudra, il faudra écrire ces chiffres pour numérateur, et pour dénominateur, autant de 9 que la période a de chiffres. Ainsi, 0, 405405... vaut $\frac{405}{999}$: 0, 01350135... vaut $\frac{135}{9999}$, etc. Mais comme il peut arriver alors que la fraction soit réductible, on cherchera (158) le plus grand commun diviseur de ses deux termes : ainsi, après avoir trouvé que 0, 405405... se réduit à $\frac{405}{999}$, on trouvera que celle-ci peut se réduire à $\frac{15}{37}$, en divisant ses deux termes par 27. De même, $\frac{135}{9999}$ se réduiroit à $\frac{15}{1111}$. On verroit encore que 0, 142857 142857...... se réduiroit d'abord à $\frac{142857}{999999}$, et ensuite à $\frac{1}{7}$, en divisant les deux termes par leur plus grand commun diviseur, qui est le numérateur même 142857; que 0, 307692 307692... se réduiroit d'abord à $\frac{307692}{999999}$, et ensuite à $\frac{4}{13}$, en divisant les deux termes par 76923, qui est leur plus grand commun diviseur.

177. Rien de plus aisé à présent que de trouver la valeur d'une fraction périodique *mixte*. En effet,

supposons d'abord que le premier ou les premiers chiffres soient des zéros, qu'on ait, par exemple, o, o333.... ou o, oo2727.... etc.; on voit que d'abord o, o333... n'est que le dixieme de o,333.... Donc, au lieu de $\frac{1}{3}$, il faudra n'écrire que le 10e de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{30}$; qu'ensuite o, oo2727.... n'est que le centieme de o, 2727... ou de $\frac{3}{11}$; il faudra donc écrire $\frac{3}{1100}$: supposons maintenant que les premiers chiffres soient un nombre quelconque, comme o, 1|666... o, 52|2727..., on voit, que o, 1|666... n'est autre chose que o, 1 ou $\frac{1}{10}$, plus o, o666... qu'on vient de voir être égal à $\frac{2}{30}$. Donc, o, 1666... vaut $\frac{1}{10}$ plus $\frac{2}{30}$, ou $\frac{5}{30}$ ou $\frac{1}{6}$. 2°. Que o, 52|2727... équivaut à $\frac{52}{100}$ plus $\frac{27}{9900}$, ou à $\frac{52}{100}$ plus $\frac{3}{1100}$, ou à $\frac{572}{1100}$ plus $\frac{3}{1100}$, ou à $\frac{575}{1100}$, ou enfin à $\frac{23}{44}$, en divisant les deux termes par 25. Soit encore à réduire o,625|189189..., je décompose cette fraction en ces deux-ci o, 625 plus o, ooo189189..., dont la premiere (174), vaut $\frac{5}{8}$, et la seconde vaut $\frac{189}{999000}$ ou $\frac{7}{37000}$. Elle équivaut donc à $\frac{5}{8}$ plus $\frac{7}{37000}$, ou à $\frac{23125}{37000}$ plus $\frac{7}{37000}$, ou à $\frac{23132}{37000}$, ou enfin en divisant par 4 les deux termes, à $\frac{5783}{9250}$.

Pour exercer le lecteur, nous allons nous proposer d'ajouter, d'abord séparément, et ensuite ensemble, les fractions que nous avons déjà ajoutées (165), mais réduites en décimales. Voyez le calcul ci-dessous où l'on a poussé l'approximation jusqu'à 9 chiffres décimaux :

1°. $\frac{2}{3}$ valent o, 666666667.
$\frac{5}{6}$ ..... o, 833333333.
$\frac{7}{12}$ ..... o, 583333333.
$\frac{11}{36}$ ..... o, 305555556.
$\frac{25}{72}$ ..... o, 347222222.
$\frac{37}{216}$ ..... o, 171296296.
$\frac{259}{1080}$ ..... o, 239814815.

2°. 1ere somme....3 $\frac{53}{360}$ .... 3, 147222222.

$\frac{3}{5}$ .... 0, 600000000.
$\frac{7}{10}$ .... 0, 700000000.
$\frac{11}{30}$ .... 0, 366666667.
$\frac{19}{90}$ .... 0, 211111111.
$\frac{329}{540}$ .... 0, 609259259.

3°. 2ème Somme... 2 $\frac{263}{540}$ .... 2, 487037037.
3 $\frac{53}{360}$ .... 3, 147222222.

4°. Somme totale, 5 $\frac{137}{216}$ .... 5, 634259259.

178. Nous avons vu tout-à-l'heure que 0, 625189189, se réduisoit à $\frac{5783}{9250}$; fraction irréductible; mais comme il est rare d'avoir besoin d'un tel dégré de précision, voyons comment on pourroit représenter cette fraction, d'une manière moins exacte à la vérité, mais du moins par des nombres plus petits. Pour cela, je divise les deux termes par le numérateur; et comme 9250 contient 5783, 1 fois avec le reste 3467, je vois que $\frac{5783}{9250}$ n'est autre chose que $\frac{1}{1\,\frac{3467}{5783}}$: Si à présent je néglige la fraction qui accompagne le dénominateur, j'aurai $\frac{1}{1}$ ou 1 pour valeur approchée, mais trop grande, puisque, par cette division, le diviseur est trop petit, et par conséquent le quotient trop grand. Si je divise encore par 5783 les deux termes de la fraction $\frac{3467}{5783}$; j'aurai $\frac{1}{1\,\frac{2316}{3467}}$; la fraction $\frac{1}{1\,\frac{3467}{5783}}$ se changera donc en $\frac{1}{1\,\frac{1}{1\,\frac{2316}{3467}}}$; négligeant alors $\frac{2316}{3467}$, j'aurai $\frac{1}{1\,\frac{1}{1}}$, ou $\frac{1}{2}$, seconde valeur approchée, mais trop foible; car par cette omission, $\frac{1}{1}$ est trop fort; donc aussi 1 $\frac{1}{1}$ l'est; donc $\frac{1}{1\,\frac{1}{1}}$ est trop foible. Divisons de nouveau 2316 et 3467 par le numérateur

2316, nous aurons au lieu de $\frac{2316}{3467}$, $\frac{1}{1\frac{1151}{2316}}$ donc, $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{2316}{3467}}}$ se changera en $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1151}{2316}}}}$; négligeant $\frac{1151}{2316}$, nous aurons $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1}}}$, qui se réduit d'abord à $\frac{1}{1}$, ensuite à $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, et enfin à $\frac{2}{3}$, troisieme valeur approchée, mais trop forte; car par l'omission de $\frac{1151}{2316}$, la derniere fraction $\frac{1}{1}$ est trop forte, $1\frac{1}{1}$ l'est donc aussi; $\frac{1}{1\frac{1}{1}}$ est donc trop foible; $1\frac{1}{1\frac{1}{1}}$ est donc aussi trop foible; donc enfin $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1}}}$ est trop fort. Divisons encore 1151 et 2316 par 1151, $\frac{1151}{2316}$ deviendra $\frac{1}{2\frac{14}{1151}}$; donc $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1151}{2316}}}}$ se changera en $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{2\frac{14}{1151}}}}}$; négligeant $\frac{14}{1151}$ on aura $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{2}}}}$, qui se réduit successivement à $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{\frac{3}{2}}}}$, puis à $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{2}{3}}}$, ensuite à $\frac{1}{1\frac{1}{\frac{5}{3}}}$; après à $\frac{1}{1\frac{3}{5}}$, et enfin à $\frac{1}{\frac{8}{5}}$ ou $\frac{5}{8}$, quatrieme valeur approchée, mais trop foible, ce qu'on démontreroit comme ci-dessus; si l'on continue les divisions, on trouvera successivement, 1°. $\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{1\frac{1}{2\frac{1}{82\frac{3}{14}}}}}}$, ce qui en né-

gligeant $\frac{3}{14}$ se réduit à $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2\frac{1}{82}}}}}$, ou à $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{165}{82}}}}}$, ou à $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\frac{82}{165}}}}$, ou à $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{247}{165}}}}$, ou à $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1\frac{165}{247}}}$, ou à $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{412}{247}}}$, ou à $\cfrac{1}{1\frac{247}{412}}$, ou à $\cfrac{1}{\frac{659}{412}}$, ou enfin à $\frac{412}{659}$, 2°. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{82+\cfrac{1}{4\frac{2}{3}}}}}}}$

qui, en négligeant $\frac{2}{3}$, et en réduisant, comme on vient de le faire, donnera $\frac{1653}{2644}$, sixieme valeur approchée, mais un peu trop foible. 3°. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{82+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1\frac{1}{2}}}}}}}}$

où l'on voit que la derniere fraction $\frac{1}{2}$ ayant 1 pour numérateur, l'on n'a plus de divisions à faire. Si l'on néglige cette fraction, on aura pour septieme valeur approchée, mais trop forte $\frac{2065}{3303}$; 4°. Si enfin on admet cette fraction $\frac{1}{2}$, on aura pour huitieme valeur la fraction même proposée. Les huit valeurs successives sont donc 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{412}{659}$, $\frac{1653}{2644}$, $\frac{1653}{2644}$, $\frac{2065}{3303}$ et $\frac{5783}{9250}$. Si l'on observe que $\frac{5783}{9250}$ vaut (177) 0, 625189189.. et que 0, 625 vaut $\frac{5}{8}$, on verra que la quatrieme valeur approchée vaut la fraction proposée à 0, 000189189... près, c'est-à-dire à $\frac{7}{37000}$ près, ou presqu'à $\frac{1}{5286}$ près, ce qui est déjà une très-grande approximation. On pourra remarquer ensuite que

la fraction $\frac{412}{659}$ qui suit $\frac{5}{8}$, est exprimée par de très-grands nombres : cela provient de ce que le dénominateur 82 de la derniere fraction qu'on employe est très-grand. Donc, pour avoir une valeur approchée, qui soit assez exacte et en même tems exprimée par de petits nombres, il faudra choisir dans les suites de fractions, celle qui précéde la fraction, où le dénominateur est le plus grand. Pour en donner encore un exemple, prenons $\frac{100000}{314159}$, qu'on verra en Géométrie exprimer à très-peu près, le rapport du diametre à la circonférence. On trouvera pour valeurs successives approchées $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, $\frac{1}{3+\frac{1}{7\frac{1}{15}}}$, $\frac{1}{3+\frac{1}{7+\frac{1}{15\frac{1}{1}}}}$ etc., qui se réduisent à $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$ etc. où l'on voit que la troisieme suite est celle qui a à sa derniere fract., le plus grand dénominateur 15. Je m'arrête donc à la seconde, et j'ai pour valeur approchée $\frac{7}{22}$: si l'on réduit au même dénominateur $\frac{100000}{314159}$ et $\frac{7}{22}$, on trouvera $\frac{2200000}{6911498}$ et $\frac{2199113}{6911498}$, qui ne different que de $\frac{887}{6911498}$, ou de $\frac{1}{7792}$ à très-peu près, ce qui fait déjà une très grande approximation. Si l'on donnoit à réduire $\frac{540}{1404}$, on trouveroit successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$, $\frac{1}{2+\frac{1}{1\frac{1}{1}}}$ et $\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1\frac{1}{2}}}}$: Evaluant alors cette derniere fraction, on auroit $\frac{5}{13}$, qui seroit la valeur exacte de la fraction proposée, et telle qu'on l'auroit trouvée (158) par la méthode du plus grand commun diviseur. On voit donc qu'on peut, au moyen de la regle ci-dessus, trouver la valeur approchée ou exacte des fractions irréductibles ou réductibles.

Des nombres complexes.

179. On pratique aussi toutes les régles de l'Arithmétique, sur les nombres complexes, dont nous

avons donné la définition (18). mais auparavant, nous allons faire connoître leurs usages et leurs subdivisions. Les nombres complexes embrassent, 1°. les monnoies; 2°. le temps; 3°. les poids; 4°. les longueurs; 5°. les cercles; 6°. les surfaces; 7°. les solidités ou les capacités. Mais nous ne parlerons que des nombres complexes relatifs aux quatre premieres especes. Voici une table de leurs noms, de leurs signes et de leurs valeurs.

1°. *Pour les monnoies.*

Une livre ou 1^{tt} vaut 20 sous ou 20^{s}.
Un sou ou 1^{s} vaut 12 deniers ou 12^{d}.

2°. *Pour le temps.*

Une année ou 1^{a} vaut 12 mois ou 12^{m}.
Un mois ou 1^{m} vaut 30 jours ou 30^{j}.
Un jour ou 1^{j} vaut 24 heures ou 24^{h}.
Une heure ou 1^{h} vaut 60 minutes ou $60'$.
Une minute ou $1'$ vaut 60 sesondes ou $60''$.
Une seconde ou $1''$ vaut 60 tierces ou $60'''$.
Une tierce ou $1'''$ vaut 60 quartes ou 60^{iv} etc.

3°. *Pour les poids.*

Une livre ou 1 ℔ vaut 2 marcs ou 2^{m}.
Un marc ou 1^{m} vaut 16 onces ou 16°.
Une once ou 1° vaut 8 gros ou 8^{g}.
Un gros ou 1^{g} vaut 3 deniers ou 3^{d}.
Un denier ou 1^{d} vaut 24 grains ou 24^{gr}.

4°. *Pour les longueurs.*

Une toise ou 1^{t} vaut 6 pieds ou 6^{p}.
Un pied ou 1^{p} vaut 12 pouces ou 12^{p}.
Un pouce ou 1^{p} vaut 12 lignes ou 12^{l}.
Une ligne ou 1^{l} vaut 12 points ou 12^{pts}.
Une aune ou 1^{a} vaut 3^{p}. 7^{p}. $10^{l}\frac{5}{6}$.
L'aune se divise en fractions ordinaires.

Digitized by Google

180. On voit, d'après ce tableau, que la livre valant 20^{s}, et le sou 12^{d}, 1^{lt} vaut 20 fois 12^{d} ou 240^{d}. Donc 1^{d} est la 240e partie de la livre; il est donc bien aisé de réduire un nombre complexe en un nombre fractionnaire, et même décimal. Soit, par exemple, donné 8^{lt} 7^{s} 6^{d} : on voit que 7^{s} ne sont autre chose que les $\frac{7}{20}$ de 1^{lt}, et que 6^{d} en sont les $\frac{6}{240}$; multipliant par 12 les deux termes de la premiere, on aura $\frac{84}{240}$, qui, ajoutés à $\frac{6}{240}$, font $\frac{90}{240}$, ou $\frac{9}{24}$, ou $\frac{3}{8}$, ou 0,375; donc 8^{lt} 7^{s} 6^{d} valent 8^{lt} $\frac{3}{8}$, ou $\frac{67l.}{8}$, ou 8^{lt}, 375. On voit par-là que pour réduire en fraction ordinaire de la livre, un nombre quelconque de sous et den. il faut multiplier les sous par 12, ajouter les den. diviser le tout par 240, enfin réduire la fraction, s'il y a lieu; ainsi 17^{s} 6^{d} valent $\frac{210}{240}$, ou $\frac{21}{24}$, ou $\frac{7}{8}$ de livre, 6^{s} 8 valent $\frac{80}{240}$ ou $\frac{1}{3}$; 13^{s} 4^{d} valent $\frac{160}{240}$, ou $\frac{2}{3}$, ou 0,666..... S'il s'agissoit de réduire en fractions, soit ordinaires, soit décimales de la toise, des pieds, pouces, lignes, comme 4^{p} 6^{p} 8^{l}, on observeroit que le pied valant 12 pouces, 4^{p} 6^{p} valent 54^{p}, et que le pouce valant 12 lignes, 54^{p} valent 12 fois 54 lignes, ou 648^{l} qui, avec les 8^{l}, font 656^{l}; mais comme il y a 864^{l} dans la toise, les 656^{l} font donc les $\frac{656}{864}$ d'une toise, ou en divisant 656 et 864 par 16, les $\frac{41}{54}$ de la toise, ou 0,7592592... de 1^{t}. On voit donc que pour réduire un nombre de pieds, pouces, lignes et points en fractions ordinaires de la toise, il faut multiplier les pieds par 12, et ajouter les pouces; multiplier cette somme par 12, et ajouter les lignes; multiplier encore cette somme par 12, et ajouter les points, et enfin regarder cette dernière somme, comme le numérateur d'une fraction, qui auroit pour dénominateur le nombre 10368, qui indique combien le point est contenu de fois dans la toise; alors, si la fraction est réductible, on l'abaissera. Quand on voudra réduire en fraction décimale, on commencera par trouver la fraction ordinaire, qu'on pourra se dispen-

ser d'abaisser à ses moindres termes; et on se conduira comme il a été dit (174). Ainsi, veut-on réduire $3^{p}\ 9^{p}\ 6^{l}\ 8^{pts}$, on multipliera 3 par 12, et au produit 36, on ajoutera 9; puis on multipliera la somme 45 par 12, et au produit 540 on ajoutera 6: enfin on multipliera la somme 546 par 12, et au produit 6552 on ajoutera 8, et l'on aura pour derniere somme 6560; on aura donc $\frac{6560}{10368}$ de toise, ou $\frac{205}{324}$, qui, réduits en décimales, donnent 0,932716.... le pied valant 1728 points, le pouce 144 points, et la ligne 12 points, si on multiplie 1728 par 3, 144 par 9 et 12 par 6, et qu'aux trois produits 5184,1296 et 72 on ajoute 8, on trouvera encore 6560 pour somme finale. Ces deux manieres sont également bonnes. Finissons ces réductions par chercher quelle fraction de la livre poids, est $1^{m}\ 5^{o}\ 7^{g}\ 1^{d}\ 16^{gr}$. 1 marc valant 8 onces, $1^{m}\ 5^{o}$ valent 13°; 1° valant 8^{g}, 13° valent 104^{g}, qui, avec les 7^{g}, font 111^{g}; 1^{g} valant 3^{d}, 111^{g} valent 333^{d}, qui, avec 1^{d}, font 334^{d}. Enfin 1^{d} valant 24^{gr}, 334^{d} valent 8016^{gr}, auxquels ajoutant 16^{gr}, on a pour derniere somme 8032 grains. Mais il y a 2^{m} dans la livre, ou 16°, ou 128^{g}, ou 384^{d}, ou enfin 9216^{gr}; on a donc $\frac{8032}{9216}$ de livre, pour la valeur de $1^{m}\ 5^{o}\ 7^{g}\ 1^{d}\ 16^{gr}$, ou en divisant les deux termes par 32, $\frac{251}{288}$; si on réduit cette fraction en décimales, on aura 0,℔87152777....

181. Il n'est pas plus difficile de résoudre le probléme inverse, c'est-à-dire, de réduire une fraction ordinaire ou décimale de la livre, par exemple, en sous et deniers; ou de la toise en pieds, pouces, lignes et points, etc. Soit proposé, par exemple, de réduire en sous et deniers $\frac{5}{8}$ de livre: je multiplie le numérateur par 20, ce qui fait 100, que je divise par 8; le quotient est 12, que je ne compte que pour 12^{s}, puisqu'ayant pris, par la multiplication de 5 par 20, vingt fois plus de parties, il faut, pour ne pas altérer la valeur de la fraction $\frac{5}{8}$ de livre, qu'on la regarde comme exprimant des parties vingt fois plus

plus petites, ou des sols. Ayant donc trouvé 12 sols avec le reste $\frac{4}{8}$ de sol, je multiplie le numérateur 4 par 12, et j'ai $\frac{48}{8}$ de denier, par la même raison que ci-dessus; divisant donc 48 par 8, j'ai pour quotient 6^{d} sans reste; d'où je conclus que $\frac{5}{8}$ de livre valent 12^{s} 6^{d}: Au lieu de multiplier 5 par 20, pour diviser ensuite par 8, il eût été plus court de ne multiplier 5 que par 5, et ensuite de ne diviser le produit 25 que par 2, ce qui eût donné 12^{s} $\frac{1}{2}$. Car multiplier 5 par 20 pour le diviser par 8, c'est multiplier 5 par $\frac{20}{8}$ ou $\frac{5}{2}$. Soit donné pour second exemple, à réduire en pieds, pouces, lignes et points, $\frac{205}{324}$ de toise, au lieu de multiplier 205 par 6, et de diviser le produit par 324, je prends le 6e de 324, et j'ai 54, par lequel je divise 205, le quotient est 3^{p} et $\frac{43}{54}$ de pied. Au lieu de multiplier ici 43 par 12, pour diviser le produit par 54, je ne multiplie 43 que par 2 sixieme de 12, mais aussi je ne divise le produit 86 que par 9, sixieme de 54; le quotient est 9^{p} et $\frac{5}{9}$ de pouce: à présent je ne multiplie 5 que par 4, tiers de 12, et je ne divise le produit 20 que par 3, tiers de 9; le quotient est 6^{l} et $\frac{2}{3}$ de ligne; enfin multipliant 2 encore par 4 tiers de 12, je divise le produit 8 par 1, tiers de 3; le quotient est 8, ensorte que $\frac{205}{324}$ de toise valent 3^{p} 9^{p} 6^{l} 8^{pts}. Soit enfin à évaluer $\frac{251}{288}$ de livre-poids. Au lieu de multiplier 251 par 2, pour avoir des marcs, je divise 251 par 144, moitié de 288: j'ai 1^{m} et $\frac{107}{144}$ de marc: au lieu de multiplier 107 par 8 pour avoir des onces, je divise 107 par 18, 8e de 144; le quotient est 5° et $\frac{17}{18}$ d'once; au lieu de multiplier 17 par 8 pour avoir des gros, je le multiplie seulement par 4, et je divise le produit 68 par 9; le quotient est 7^{g} et $\frac{5}{9}$ de gros: au lieu de multiplier 5 par 3 pour avoir des deniers, je le divise par 3 tiers de 9, et j'ai 1^{d} et $\frac{2}{3}$ de denier; enfin au lieu de multiplier 2 par 24 pour avoir des grains, je le multiplie seulement par 8, et j'ai 16^{gr}, parce que

le diviseur est 1; donc $\frac{251}{288}$ de livre-poids vaut 1^{m} 5^{o} 7^{g} 1^{d} 16^{gr}, comme ci-dessus (180).

182. Si la fraction proposée étoit décimale, le calcul n'en seroit que plus simple. Ainsi veut-on réduire $0^{lt},625$? je le multiplie par 20, et j'ai 12,500, ou 12,5 que je compte pour 12^{s}, 5. Pour réduire en deniers $0^{s},5$ je multiplie 5 par 12, et j'ai 6,0, ou 6 que je compte pour 6^{d}, donc $0^{lt},625$ vaut 12^{s} 6^{d}. Veut-on encore réduire $0^{lb},87152778$? je multiplie par 2, et j'ai $1^{M},74305556$, multipliant $0^{M},74305556$ par 8, j'ai $5^{o},94444448$; multipliant $0^{o},94444448$ encore par 8, j'ai $7^{g},55555584$: multipliant 0,55555584 par 3, j'ai $1^{d},66666752$; enfin multipliant $0^{d},66666752$ par 24, j'ai $16^{gr},00002048$ ou 16^{gr}, comme ci-dessus, à 2 cent-milliemes près, ce qui vient de ce que $0^{lb},87152778$ est un peu trop fort, (180).

183. Appliquons maintenant aux nombres complexes, les quatre regles ordinaires, et commençons par l'addition. Soit proposé d'abord d'ajouter les cinq nombres complexes suivans.

	364^{lt}	17^{s}	10^{d}
	845	19	9
	74	1	0
	9456	10	11
	9	7	8
somme...	10750^{lt}	17^{s}	2^{d}
preuve...	1232	57	38
		23	10

je les écris d'abord les uns sous les autres, de maniere que les unités de même espèce soient dans une même colonne verticale; commençant ensuite l'addition par les unités de la plus petite espèce, c'est-à-dire, par les den., j'ai pour leur somme 38^{d}; comme 12^{d} font 1^{s}, je divise 38 par 12, et j'ai 3^{s} et 2^{d} de reste;

j'écris ces 2 ^{d} sous les unités de den.^{s}, et je retiens les 3^{s} pour les ajouter à la colonne des unités de sols; la somme est 27^{s} qui font 7 sols que j'écris sous cette colonne, et 2 dixaines de sols que je retiens pour les ajouter à la colonne des dixaines de sols : la somme fait 5 dixaines de sols, et comme il faut 20^{s} ou 2 dixaines de sols pour faire une livre, je divise 5 par 2, ou je prends la moitié de 5, qui est 2, avec le reste 1: je porte cet 1 sous les dixaines de sols, et je retiens les 2 qui sont des livres, pour les ajouter aux unités de livres. Faisant alors l'addition, comme pour les entiers, j'ai 10750^{tt} pour la somme des livres, et par conséquent 10750^{tt} 17^{s} 2^{d} pour la somme totale.

On peut prendre la somme des deniers de deux manieres; soit en ajoutant tout de suite 10 avec 9,0,11 et 8, ou en ajoutant d'abord les unités 0,9,0,1 et 8, ce qui donne 18, écrivant à part 8, puis retenant 1, et l'ajoutant avec les dixaines 1 et 1, ce qui donne 38. Cette derniere méthode est utile pour plusieurs cas, où la premiere seroit trop fatiguante pour la mémoire. Si on proposoit par exemple d'ajouter;

	36 lb	0^{M}	7^{o}	7^{g}	2^{d}	23$^{gr.}$	
	45	1	5	5	1	21	
	35	1	6	6	1	22	129$^{gr.}$ {24
	23	0	5	7	0	19	9 {5$^{d.}$
	51	0	0	4	1	23	
	60	0	1	5	2	21	
somme	252 lb	1^{m}	4^{o}	6^{g}	0^{d}	9$^{gr.}$	
preuve	^{2}2	5	28	38	12	129	
		3	4	4	5	^{1}0	

je commence par ajouter les unités de grains; j'ai pour somme 19; j'écris 9 à part, et je retiens 1, que j'ajoute aux dixaines de grains; la somme est 12; je divise alors 129 par 24; le quotient est 5 deniers et 9 grains, que j'écris sous les unités de grains. Ajoutant

alors les 5 deniers avec les deniers, j'ai 12 d. qui font 4 gros sans reste; j'écris donc 0 sous les deniers, et ajoutant les 4 gros avec les gros, j'ai 38 gros, que je divise par 8, pour avoir les onces qu'ils contiennent; le quotient est 4° 6ᵍ. J'écris les 6ᵍ sous les gros; ajoutant ensuite les 4° avec les onces, il me vient 28° ou 3 marcs 4°; je pose les 4° sous les onces; et je retiens 3ᵐ, qui ajoutés à la colonne des marcs, font 5 marcs ou 2ᵗᵇ 1ᵐ; j'écris 1ᵐ sous les marcs; enfin ajoutant les 2ᵗᵇ aux livres, j'ai 252ᵗᵇ.

184. La preuve des additions complexes se fait d'une maniere analogue à celle qu'on a employée pour les entiers (52). On commencera par les entiers, en se servant de la regle donnée dans cet article. Mais s'il y a un reste, comme dans le premier des deux exemples ci-dessus, où il restoit 2ᵗᵗ, on réduira ces livres en sols, ce qui fera 40ˢ, auxquels on ajoutera les 17ˢ de la somme, et on aura 57ˢ ou 5 dixaines de sols et 7ˢ. Ajoutant alors ensemble les dixaines de sols, on aura 3 dixaines qui, ôtées de 5 donneront 2 de reste, ce qui fera, avec les 7ˢ, 27ˢ, dont on ôtera 24, somme des unités de sols, et il restera 3ˢ qui font 36ᵈ, et 38ᵈ avec les 2ᵈ de la somme; ajoutant alors les dixaines de deniers, on en aura 2, qui, ôtées des 3 dixaines de 38, donneront 1 dixaine de reste, et par conséquent en tout 18ᵈ, dont on ôtera la somme des unités de deniers; cette somme étant aussi 18, il ne reste rien, ce qui prouve (52) que l'opération a été bien faite. Ce que nous venons de dire suffit pour entendre la preuve du second exemple.

185. Soit à présent à soustraire deux nombres complexes l'un de l'autre, qu'on veuille, par exemple,

de...	54ᵗᵗ	18ˢ	10ᵈ
ôter...	23	13	7
reste...	31ᵗᵗ	5ˢ	3ᵈ
preuve...	54	18	10

je commence, comme dans l'addition, à écrire les unes sous les autres les unités de même espèce, et à soustraire les unes des autres celles de la plus petite. Je dis donc; 7₰ ôtés de 10₰ donnent 3₰ pour reste, que je pose sous les deniers; 3ſ ôtés de 8 donnent pour reste 5ſ que je mets sous les unités de sols: 1 dixaine de sols ôtée de 1 dixaine de sols, donne 0 pour reste, qu'on peut se dispenser de poser. Ensuite 23# de 54# donnent 31# que je pose sous les livres.

Mais il pourroit arriver que le nombre inférieur ne pût se retrancher du supérieur, alors on se conduira comme dans l'exemple suivant,

de...	327#	0ſ	6₰
ôter...	115	17	9
reste...	211#	2ſ	9₰
preuve...	327	0	6

je ne puis ôter 9₰ de 6₰, je vais donc emprunter 1ſ sur la colonne des sols; mais il ne s'y en trouve pas: alors j'emprunte sur le chiffre 7 des livres, 1# qui vaut 20ſ; mais comme je n'ai besoin que d'un sol, de ces 20ſ j'en laisse 19 sur les sols du nombre supérieur, et ajoutant 1ſ ou 12₰ aux 6₰, j'ai 18₰ dont j'ôte 9₰; il me reste 9₰. Ensuite de 19ſ j'ôte 17ſ, il me reste 2ſ. Enfin de 326# et non de 327, à cause de la livre empruntée, j'ôte 115; il me reste 211#. La preuve de la soustraction des nombres complexes se fait comme celle des autres, en ajoutant (54) le plus petit nombre avec le reste: ainsi ajoutant 115# 17ſ 9₰ avec 211# 2ſ 9₰, j'ai 327# 0ſ 6₰, qui est le nombre dont on a retranché. Ceci suffit pour savoir faire et la soustraction et la preuve des deux exemples suivans.

de...	131 ℔	1 m	4 o.	5 g	1 d	7 gr.
ôter...	68	0	7	6	2	21
reste...	63 ℔	0 m	4 o	6 g	1 d	10 g.
preuve...	131	1	4	5	1	7

de...	54 t	3 p	9 p	0 l	1 pts.
ôter...	21	5	10	2	5
somme...	32 t	3 p	10 p	9 l	8 pts.
preuve...	54	3	9	0	1

186. Passons à la multiplication et à la division des nombres complexes, et d'abord voyons la multiplication et la division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe. Bien plus, comme les opérations de la premiere dépendent souvent de celles de la seconde, nous allons commencer par la division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe. Observons avant tout (90) qu'avec le même dividende et le même diviseur, on peut avoir à résoudre plusieurs questions différentes. Ainsi, si l'on proposoit de diviser 560 l. 5 s. 3 d. par 21, pour être en état de connoître la nature des unités du quotient, il faudroit savoir à laquelle de ces trois questions il s'agit de répondre. 1°. 21 toises ou aunes, ou, etc., ayant coûté 560 l. 5 s. 3 d., à combien revient la toise ou l'aune, ou, etc.? 2°. Combien de fois 560 l. 5 s. 3 d. contiennent-ils 21 l.? 3°. A 21 l. la toise, ou l'aune, ou, etc., combien aura-t-on de toises, ou d'aunes, ou, etc, pour 560 l. 5 s. 3 d.? En effet, l'on voit que dans la premiere espèce de question, le quotient doit être de même nature que le dividende; et que dans la seconde et la troisieme, il n'est de la nature, ni du dividende, ni même du diviseur, puisqu'il est un nombre abstrait dans la seconde, et que, dans la troisieme, il est un nombre de toises, ou d'aunes, ou, etc. Voyons d'abord le cas où le quotient doit être de même espèce que le dividende; et, pour

cela, reprenons la premiere question des trois ci-dessus; c'est-à-dire, celle où l'on demande le prix de la toise par exemple, en supposant que 21 toises aient coûté 560 l. 5 s. 3 d.: Il s'agit donc de prendre le 21ᵉ de 560 l. 5. 3 d., ou plutôt de 560 l., puis de 5 s., puis de 3 d. Or, on pourroit, sans nouvelle regle, et au moyen de celle de l'article (181), trouver chaque quotient séparé, qu'il ne faudroit plus ensuite qu'ajouter, pour trouver le quotient total. En effet, le 21ᵉ de 560 l. fait 26 l. $\frac{14}{21}$, ou 26 $\frac{2}{3}$, ou 26 l. 13 s. 4 d.; le 21ᵉ de 5 s. fait $\frac{5}{21}$ de sol, ou $\frac{60}{21}$ de denier, ou $\frac{20}{7}$ de denier, ou 2 d. $\frac{6}{7}$; enfin, le 21ᵉ de 3 d. vaut $\frac{3}{21}$ ou $\frac{1}{7}$ de denier: ajoutant alors 26 l. 13 s. 4 d., avec 2 d. $\frac{6}{7}$ et $\frac{1}{7}$ de den., on auroit 26 l. 13 s. 7 d. pour le prix cherché de la toise: mais on aura plutôt fait de la maniere suivante.

560 l. 5 s. 3 d.	21
140	26 l. 13 s. 7 d.
14 l.	
20	
285 s.	
75	
12 s.	
12	
147 d.	
000	

Après avoir divisé à l'ordinaire 560 l. par 21, ce qui donne pour quotient 26 l., et pour reste 14 l., je réduis ce reste en sols; ce que je fais en multipliant 14 par 20, et en ajoutant au produit 280 s. les 5 s. du dividende; la somme est 285 s. que je dois encore diviser par 21; ce quotient est 13 s., et le reste est 12 s. que je multiplie par 12 pour les réduire en deniers, ce qui fait 144 d., auxquels j'ajoute les 3 d. du dividende; la somme fait 147 d., qui, divisés par 21, donnent 7 den. sans reste.

Observons ici, 1°. sur la réduction des livres en sols, que, puisque pour multiplier 14 par 20, il faut doubler 14, et ajouter un zéro à la suite du double 28, ce qui fait 280, la maniere la plus courte de faire cette réduction, lorsqu'il y a des sols au dividende, est de mettre ce nombre de sols à la suite du double des livres restantes; ainsi j'ai écrit 285 en mettant les 5 s. du dividende, à la suite de 28 double des 14 l. restantes; s'il y avoit des dixaines de sols au dividende, on opéreroit de même, mais en augmentant d'une unité le dernier chiffre de ce double des livres : ainsi, pour réduire 37 l. 17 s. en sols, j'écris 757 s. en mettant d'abord les 7 s., et en ajoutant 1 à 74 double de 37 l. 2°. Que, pour réduire les sols en deniers, j'ai multiplié d'un seul coup 12 par 12, en ajoutant au produit 144 les 3 d. du dividende. Si j'avois eu 17 s. 11 d. à réduire en den., j'aurois dit 12 fois 7 fait 84, et 11 font 95; je pose 5, et retiens 9: ensuite 12 fois 1 font 12, et 9 de retenus font 21; donc 17 s. 11 d. feroient 215 d.

187. On voit que la solution précédente 26 l. 13 s. 7 d. conviendroit encore au cas, où il s'agiroit de partager 560 l. 5 s. 3 d. entre 21 personnes; mais s'il s'agissoit de savoir combien 560 l. 5 s. 3 d. contiennent de fois 21 l., cas où le quotient doit être abstrait; je réduis d'abord les 5 s. 3 d. en fraction de la livre, ce qui donne $\frac{63}{240}$ ou $\frac{21}{80}$.

1°. $560\frac{21}{80}$ | 21
140 | 26 $\frac{1141}{1680}$ ou $\frac{163}{240}$.
14
80
1120
21
1141
21
80
1680

```
     560ᵗ 1ᵖ 6ᵖ 10ˡ 4/5 { 12
2°.  140                 { 26ᵗ 4ᵖ 0ᵖ 10ˡ 4/5.
      14ᵖ
       6
     ----
      85ᵖ
       1ᵖ
      12
     ----
      18ᵖ
      12
     ----
     226ˡ
      16
       5
     ----
      84
```

Alors je divise 560 par 21 ; (voyez 1°.) le quotient est 26, et le reste 14, que je réduis en 80es, en multipliant 14 par 80, et ajoutant le numérateur 21 de $\frac{21}{80}$ au produit; la somme est $\frac{1141}{80}$, dont le 21e (172) est $\frac{1141}{1680}$, ou en divisant les deux termes par 7, $\frac{163}{240}$. Enfin s'il falloit résoudre cette question ; à 21 l. la toise, combien aura-t-on de toises pour 560 l. 5 s. 3 d. ; cas où le quotient doit être des toises ? Je commence par transformer 560 l. 5 s. 3 d. en 560 $\frac{21}{80}$; ensuite j'observe que la question revient à prendre le 21e de 560^{t} $\frac{21}{80}$; je réduis donc $\frac{21}{80}$ de toises en pieds, pouces et lignes, et j'ai 560^{t} 1^{p} 6^{p} 10^{l} $\frac{4}{5}$ à diviser par 21. Je trouve d'abord 26 toises et 14 pour reste ; je multiplie alors 14 par 6 pour avoir des pieds; et au produit 84, j'ajoute 1^{p} qui se trouve au dividende ; je divise 85^{p} par 21 ; le quotient est 4^{p}, et le reste, 1^{p} que je multiplie par 12, pour avoir des pouces ; et au produit 12^{p}, j'ajoute les 6^{p} du divid. ; divisant alors la somme 18^{p} par 21 ; le quotient est 0^{p}. Je multiplie alors 18^{p} par 12, pour avoir des lignes ; le produit est 226^{l}, avec les 10^{l} du dividende ; je divise donc 226^{l} par 21 ; le quotient est 10 ,

et il reste 16^{l} que je réduis en cinquiemes, en multipliant 16 par 5, et ajoutant ensuite au produit $\frac{80}{5}$ de ligne les $\frac{4}{5}$ du dividende; je divise alors $\frac{84}{5}$ par 21, et le quotient est $\frac{4}{5}$ (172). Le quotient total est donc $26^{t}\ 4^{p}\ 0^{p}\ 10^{l}\ \frac{4}{5}$.

Si l'on observe que le quotient 26 l. 13 s. 7 den., qu'on a trouvé en réponse à la premiere question, n'est autre chose que 26 l. $\frac{163}{240}$, ou en le regardant comme abstrait que $26\frac{163}{240}$, ou enfin, en le regardant comme des toises, que $26^{t}\ \frac{163}{240}$; c'est-à-dire, en réduisant $\frac{163}{240}$ de toise en pieds, pouces, lignes et fraction de ligne, $26^{t}\ 4^{p}\ 0^{p}\ 10^{l}\ \frac{4}{5}$; on verra que la question peut, dans tous les cas, être ramenée à diviser 560 l. 5 s. 3 d. par 21; mais quand on aura trouvé le quotient 26 l. 13 s. 7 d., il faudra réduire 13 s. 7 d. en fraction de la livre; alors regardant 26 l. $\frac{163}{240}$, comme $26\frac{163}{240}$, on aura la réponse au cas où l'on demanderoit combien de fois 560 l. 5 s. 3 d. contiennent 21 l.: si de plus on réduit $\frac{163}{240}$ en pieds, pouces, lignes, et fraction de ligne, on aura la réponse au troisieme cas ci-dessus.

Soit proposé pour second exemple, de chercher combien l'on fera faire de toises pour 1 l., en supposant que $642^{t}\ 5^{p}\ 6^{p}\ 4^{l}\ \frac{3}{5}$ coûtent 89 l.

$$
\begin{array}{l}
642^{t}\ 5^{p}\ 6^{p}\ 4^{l}\ \frac{3}{5} \\
\quad 19^{t} \\
\quad\ \ 6 \\
\hline
119^{p} \\
\ 30^{p} \\
\ 12 \\
\hline
366^{p} \\
\ \ 10^{p} \\
\ \ 12 \\
\hline
124^{l} \\
\ 35^{l} \\
\quad 5 \\
\hline
178
\end{array}
\qquad
\left\{
\begin{array}{l}
89 \\
\hline
7^{t}\ 1^{p}\ 4^{p}\ 1^{l}\ \frac{178}{445} \text{ ou } \frac{2}{5}
\end{array}
\right.
$$

On voit que le quotient doit être des toises, pieds, etc.; je divise donc d'abord 642^t par 89; le quotient est 7^t, et il reste 19^t que je multiplie par 6 pour avoir des pieds; et au produit 114 P, j'ajoute les 5 P du dividende; la somme fait 119 P, que je divise par 89; le quotient est 5 P, et le reste 30 P que je réduis en pouces, en les multipliant par 12; le produit est 360^p, auxquels j'ajoute les 6^p du dividende; la somme fait 366^p que je divise par 89; le quotient est 4^p, et le reste 10^p, que je multiplie par 12 pour les réduire en lignes; et au produit 120, j'ajoute les 4^l du dividende; la somme fait 124^l qui, divisés par 89, donnent 1^l pour quotient, et 35^l pour reste: je multiplie enfin 35^l par 5 pour les réduire en cinquiemes de ligne: au produit $\frac{175}{5}$, j'ajoute les $\frac{3}{5}$ du dividende; et j'ai $\frac{178}{5}$ qui, (172) divisés par 89, donnent $\frac{178}{445}$ ou $\frac{2}{5}$, en divisant les deux termes par 89; le quotient total est donc 7^t 1 P 4^p 1^l $\frac{2}{5}$.

Si l'on eût demandé combien 642^t 5 P 6^p 4^l $\frac{3}{5}$ contiennent de fois 89^t, j'aurois d'abord réduit 5 P 6^p 4^l $\frac{3}{5}$ en fraction ordinaire de la toise; ce qui m'eût donné 3983 cinquiemes de ligne ou $\frac{3983}{4320}$ de toises; alors regardant 642^t $\frac{3983}{4320}$, et 89 comme abstraits, j'aurois eu un nombre entier joint à une fraction à diviser par un nombre entier, ce qui eût donné (173) d'abord 7 pour quotient et 19 de reste. Réduisant 19 $\frac{3983}{4320}$, tout en fraction, j'ai $\frac{86063}{4320}$ dont le numérateur est exactement divisible par 89, et donne 967. Le quotient total est donc 7 $\frac{967}{4320}$; voyez l'exemple ci-après. Si je réduis dans le premier quotient 1 P 4^p 1^l $\frac{2}{5}$ en fraction ordinaire de la toise, j'ai $\frac{967}{4320}$ de toises; alors regardant le quotient entier 7 $\frac{967}{4320}$ comme abstrait, j'ai le même quotient que je viens de trouver.

Enfin si l'on proposoit cette question; à 89 toises pour 1 l., combien coûteront 642^t 5 P 6^p 4^l $\frac{3}{5}$, où le quotient est d'une espece différente du dividende? Je réduis d'abord ce dividende en toises et fraction

ordinaire de la toise, et j'ai, comme ci-dessus; $642^{l}\,\frac{3983}{4320}$, que je regarde comme des livres et fraction de livre. Réduisant ensuite $\frac{3983}{4320}$ de liv. en sols et deniers, j'ai 18 s. 5 d. $\frac{5}{18}$. Divisant donc 642 l. 18 s. 5 d. $\frac{5}{18}$ par 89, comme à l'ordinaire, je trouve pour quotient 7 l. 4 s. 5 d. $\frac{13}{18}$. Si après avoir trouvé que le premier quotient $7^{t}\,1^{p}\,4^{p}\,1^{l}\,\frac{3}{5}$, vaut en nombre abstrait $7\,\frac{967}{4320}$, on réduit cette fraction en sols et deniers, on eût trouvé de même 7 l. 4 s. 5 d. $\frac{13}{18}$. Voici les détails des deux opérations.

1°. $642\,\frac{3983}{4320}$ | 89 | quotient $7\,\frac{967}{4320}$

19
4320
38880
4320
3983
86063
596
623
000

2°. 642 l. 18 s. 5 d. $\frac{5}{18}$ | 89 | quotient 7 l. 4 s. 5 d. $\frac{13}{18}$

19 l.
20
398 s.
42 s.
12
509 d.
64 d.
18
512
64
5
1157
267
000

188. On voit donc que, dans tous les cas, la division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe, se réduit à la regle suivante : divisez les unités principales du dividende par le diviseur, et réduisez le reste en unités immédiatement inférieures, en ajoutant au résultat les unités de même espece, qui se trouvent dans le dividende ; et divisez encore le tout par le diviseur; réduisez le reste en unités inférieures, et ajoutez celles qui se trouvent au dividende, et continuez ainsi jusqu'à la derniere espece d'unité ; et si alors il se trouve une fraction, multipliez le dernier reste par le dénominateur; au produit, ajoutez le numérateur, et divisez ensuite, s'il se peut, la somme par le diviseur; ou sinon, multipliez le dénominateur par ce même diviseur.

189. Nous pouvons maintenant passer à la multiplication d'un nombre complexe par un nombre incomplexe; et c'est à quoi une question fort simple va nous conduire. Soit proposé de savoir combien coûteront 54 toises, à 28 l. 10 s. la toise. On voit aisément que le produit doit être des livres, qu'on trouvera en répétant 54 fois 28 l. 10 s., ou 54 fois 28 l. et 54 fois 10 s. Or, 54 fois 28 l. font 1512 l.; et ensuite, 54 fois 10 s. font 54 fois $\frac{1}{2}$ livre, ou la $\frac{1}{2}$ de 54 l.; ou 27 l. qui, ajoutées à 1512 l., donnent 1539 l., qui est le prix cherché. Si au lieu de coûter 28 l. 10 s. la toise eût coûté 28 l. 15 s. on eût décomposé 15 s. en 10 s. et 5 s.; et après avoir trouvé que 10 s. donnoient 27 l. on diroit: 5 s. étant la moitié de 10 s., leur produit par 54 ne doit être que la $\frac{1}{2}$ du produit de 10 s. par 54; c'est-à-dire, la $\frac{1}{2}$ de 27 l. ou 13 l. 10 s.; ce qu'on trouveroit encore en observant que 5 s. étant le quart d'une livre, 54 fois 5 s., ne sont que 54 fois $\frac{1}{4}$ de livre, ou le quart de 54 l., ou 13 l. 10 s. Alors, ajoutant les trois produits partiels 1512 l., 27 l. et 13 l. 10 s., on auroit 1552 l. 10 s. pour le prix de 54 toises, à 28 l. 15 s. la toise: enfin,

si l'on eût demandé le prix de 54 toises, à 28 l. 18 s. la toise, après avoir trouvé les trois produits ci-dessus, il resteroit encore à prendre 54 fois 3 s. pour lesquels on prendroit d'abord 54 fois 2 s.: or, 2 s. étant le cinquieme de 10 s., 54 fois 2 s., ne doivent donner que le 5e de 54 fois 10 s., ou de 27 l., ou que 5 l. 8 s.: enfin, 54 fois 1 s. ne doivent faire que la moitié de 54 fois 2 s. ou de 5 l. 8 s., ou que 2 l. 14 s. Voici l'opération détaillée tout au long.

I.

	28 l.	18 s.
	54	
	112 l.	
	140	
Pour 10 s.	27	
5	13 l.	10 s.
2	5	8
1	2	14
	1560 l.	12 s.

190. Il est utile de donner ici une regle abrégée, pour trouver en un seul produit, ou tout au plus en deux, celui d'un nombre de sols par un nombre quelconque. Supposons d'abord que l'on veuille multiplier 2 s. par un nombre quelconque, par 246 par exemple. On voit que cela revient à prendre 246 fois le $\frac{1}{10}$ d'une liv. ou $\frac{1}{10}$ de 246 l.; ce qui donne 24,6 l.; mais le $\frac{1}{10}$ de 1 l. est 2 s.; donc les $\frac{6}{10}$ feront 6 fois 2 s. ou 12 s.: on voit de même que 359 fois 2 s., n'est autre chose que le $\frac{1}{10}$ de 359 l. ou 35,9, ou 35 l. 18 s. D'où il suit qu'en général pour multiplier 2 s. par un nombre quelconque, il faut écrire au rang des livres, tous les chiffres de ce nombre, hors le dernier à droite, qu'on doublera, et qu'on

écrira au rang des sols. Il suit encore de-là, que pour multiplier 1 s. par un nombre quelconque, 1°. cela revient à prendre le 20e d'un égal nombre de livres; 2°. que le produit doit être la moitié de celui de 2 s.; 3°. qu'il faut donc écrire le dernier chiffre de ce nombre au rang des sols, et prendre la moitié de tous les autres chiffres, qu'on écrira au rang des livres, en ayant soin, s'il reste une unité, de l'écrire comme une dixaine de sols; ainsi 246 fois 1 s. ou le 20e de 246 l. est 12 l. 6 s.; ce qui est évident, puisque le 10e étoit 24 l. 12 s. Le 20e de 359 l. est de 17 l. 19 s., en écrivant comme une dixaine de sols, l'unité qui reste de la division de 35 par 2. On voit encore que si l'on avoit à multiplier 246, par exemple, par un nombre pair de sols, comme par 16 s., on pourroit regarder 16 s. comme 8 fois 2 s.; et comme pour 2 s., on a 24 l. 12 s., il s'ensuit donc qu'il faut multiplier d'abord 12 s. par 8, ce qui donnera 96 s. ou 4 l. 16 s., dont on écrira les 16 s. au rang des sols, et dont on retiendra les 4 l. pour les ajouter au produit de 24 l. par 8; ce qui fera 200 l. 16 s.: sur quoi l'on peut observer, qu'on arriveroit plus brièvement au même résultat, en laissant le dernier chiffre 6 tel qu'il est, et en comptant le produit 48 de 6 par 8, comme 4 l. 16 s. au lieu de 48 s. Ainsi, pour multiplier encore 18 s. par 54, je dis: 9 fois 4 font 36, que je compte pour 3 l. 12 s.; je pose les 12 s. au rang des sols, et je retiens les 3 l., que j'ajoute au produit 45 de 5 par 9; et j'ai 48 l. 12 s., qui est le même nombre, que dans l'exemple ci-dessus, j'avois trouvé en quatre produits différens.

Si, outre les sols, il se trouvoit encore des deniers au multiplicande, on se conduiroit, comme on va le voir dans l'exemple suivant, où l'on se propose de trouver, combien, à 216 l. 17 s. 10 d. par jour, il en coûteroit pour 132 jours.

II.

	216 l.	17 s.	10 d.
	132		
	432 l.		
	648		
	216		
Pour 16 s.	105	12 s.	
1 s.	6	12	
6 d.	3	6.	
4 d.	2	4	
	28629 l.	14 s.	

Le produit devant être des livres, je pose 216 l. 17 s. 10 d. pour multiplicande, et je vois qu'il faut prendre 132 fois 216 l.; ensuite 132 fois 17 s., et enfin 132 fois 10 d. Après avoir multiplié 216 par 132, à l'ordinaire, je décompose 17 s. en 16 s., plus 1 s. Pour avoir le produit de 132 fois 16 s., je prends la moitié de 16 qui est 8, et je dis : 8 fois 2 font 16, dont je double le dernier chiffre 6; ce qui donne 12, que je mets au rang des sols, et je retiens le 1[er]. chiffre 1 pour l'ajouter au produit 104 de 13 par 8; j'ai donc 105 l. 12 s. pour 132 fois 16 s. : quant à 132 fois 1 s., on vient de voir qu'il faut écrire 6 l. 12 s.; il ne me reste donc plus à prendre que 132 fois 10 d. Pour cela, je décompose 10 d. en 6 d., plus 4 d.; pour prendre d'abord 132 fois 6 d., je vois qu'il suffit de prendre la moitié de ce que j'ai eu pour 132 fois 1 s., ou la moitié de 6 l. 12 s., qui est 3 l. 6 s.; enfin 4 d. étant le tiers de 1 s., je vois que j'aurai le produit de 132 fois 4 d. en prenant le tiers de 6 l. 12 s., que j'ai eus pour 132 fois 1 s. : ce tiers est 2 l. 4 s., que j'écris; et ajoutant tous les produits partiels, j'ai 28629 l. 14 s. pour la somme qu'on dépenseroit en 132 jours, à 216 l. 17 s. 10 d. par jour.

191.

191. Soit proposée maintenant cette question : pour 1 l. on a fait faire 35^t 5^P 8^p d'ouvrage, combien fera-t on faire d'ouvrage pour 154 l.? On voit qu'ici le produit doit être des toises, pieds, etc. ; je pose donc pour multiplicande, 35^t 5^P 8^p, comme il suit.

III.

	35^t	5^P	8^p
	154		
	770^t		
	462		
Pour 3^P	77		
2^P	51	2^P	
8^p	17	0	8^p
	5535^t	2^P	8^p

Je vois qu'il s'agit ici de répéter 154 fois d'abord 35^t, ce qu'on fera à l'ordinaire, puis 154 fois 5^P, et enfin 154 fois 8^p: Pour prendre 154 fois 5^P, je décompose 5^P en 3^P, plus 2^P. Je dois donc prendre, 1°. 154 fois 3^P, ou 154 fois $\frac{1}{2}$ toise, ou la $\frac{1}{2}$ de 154^t, ce qui donne 77^t; 2°., 154 fois 2^P, ou 154 fois $\frac{1}{3}$ de toise, ou le $\frac{1}{3}$ de 154 ; ce qui fait 51^t pour 153^t, et $\frac{1}{3}$ de toise ou 2^P : 3°. enfin pour prendre 154 fois 8 pouces, je vois que 8 pouces sont le tiers de 2^P; je dois donc avoir pour 154 fois 8^p le tiers de 51^t 2^P, que j'ai eus pour 154 fois 2^P ; ce tiers est de 17^t 0^P 8^p (186). Alors réunissant tous ces produits, j'ai 5535^t 2^P 8^p en réponse à la question.

192. Encore un exemple, pour obvier à un cas embarrassant qui peut se présenter. On demande combien, à raison d'une certaine somme pour 37^{lb} 1^m 0^o 4^g 0^d 8^{gr} d'une marchandise, on aura de livres, marcs, etc., pour 96 fois cette somme. On voit qu'il s'agit ici de répéter 96 fois 37^{lb} 1^m, etc. Voici l'opération.

I V.

		37℔	1 m	0 o	4 g	0 ℈ 8 gr
		96				
		222℔				
		333				
	pour 1 m	48				
Faux produit	pour 1 o	~~6~~				
	pour 4 g	3				
Faux produit	pour 1 ℈	~~0~~	~~0~~ m	~~4~~ o		
	pour 8 gr	0	0	1	2 g	2 ℈
		3603℔	0 m	1 o	2 g	2 ℈

Après avoir multiplié 37℔ par 96, à l'ordinaire, je prends pour 1 m la moitié de 96 l.; ce qui fait 48 l.: à présent, il faut prendre pour 4 gros, qui est la moitié d'une once; et comme une once est elle-même le 8e d'un marc, on voit qu'on peut prendre d'abord pour 1o le 8e des 48℔ qu'on a eues pour un marc, et prendre ensuite pour 4 gros la moitié de ce 8e, ou de 6℔, ce qui fait 3℔, en ayant soin de barrer 6℔, qui ne doivent pas entrer dans la somme finale, et qu'on appelle pour cela *faux produit.* On se conduira de même pour 8gr; c'est-à-dire, qu'on prendra un nouveau faux produit pour 1 ℈, qui est le 12e de 4g; produit qu'on trouvera en prenant le 12e des 3℔ qu'ont données 4g : ayant trouvé que le 12e de 3℔ est de 4o, on les barrera; et ensuite, pour avoir ce que doivent donner 8gr qui sont le tiers de 1 ℈, l'on n'aura plus qu'à prendre le tiers de 4o, qui est 1o 2g 2 ℈ : Ajoutant alors les produits partiels, à l'exception des faux produits, on aura pour réponse, à la question proposée, 3603℔ 0m 1o 2g 2 ℈.

En rassemblant et comparant les divers procédés, qu'on a suivis dans les regles ci-dessus, on voit que, pour multiplier un nombre complexe par

un nombre incomplexe, il faut décomposer les unités inférieures du multiplicande en parties aliquotes (70), soit de l'unité principale, soit les unes des autres; et que, lorsque cette décomposition se présentera sous une forme trop composée, on y obviera par de *faux* produits, qu'on barrera, pour ne pas les comprendre dans la somme des *véritables*.

193. Nous finirons cette partie de la multiplication des nombres complexes, par donner trois sortes d'abbréviations, qui peuvent être quelquefois utiles. 1°. On peut très-souvent décomposer les unités inférieures, plus simplement qu'on ne l'a vu jusqu'ici. Par exemple si j'avois à prendre 72 fois 13 s. 4 d., au lieu de décomposer 13 s. 4 d., en 12 s., 1 s. et 4 d., ce qui donneroit trois produits différens, j'observe que 6 s. 8 d. sont le tiers d'une livre, et que par conséquent, pour 13 s. 4 d. double de 6 s. 8 d., il faut prendre le tiers de 72 l. qui est 24 l., et l'écrire deux fois, ce qui ne fait qu'un seul produit distinct. Si j'avois à multiplier par 72, 17 s. 6 d., au lieu de multiplier par 72, 16 s. puis 1 s., puis 6 d.; je remarque 17 s. 6 d. ne sont autre chose que les $\frac{7}{8}$ d'une livre, ou qu'une livre moins $\frac{1}{8}$: prenant donc le 8e. de 72 l., qui est 9 l., je le retranche de 72 l., et il reste 63 l. pour le produit cherché. Soit encore 1p 6p à multiplier par 92, au lieu de faire deux produits, l'un pour 1p et l'autre pour 6p, je prends tout de suite pour 1p 6p le quart de 92, parce qu'ils sont le quart de la toise; il en est ainsi de mille autres cas que l'habitude apprendra.

2°. Si le multiplicateur ne passe pas 12, l'on pourra trouver le produit plus briévement, en commençant par les plus petites unités : un exemple suffira : soit proposé de trouver combien, à 216 l. 17 s. 10 d. par jour, il en coûteroit pour 12 jours? Je prends d'abord 12 fois 10 deniers, produit qui est

évidemment 10 s., puisque 12 fois 1 d. font 1 s.; je pose 0 d. au quotient, et je retiens 10 s.: je dis ensuite, 12 fois 7 s. font 84 s., et 10 retenus, font 94 s.: je pose 4 s. au rang des sols, et je retiens 9 dixaines de sols, pour les ajouter au produit de 1 dixaine de sols par 12; et j'ai pour somme 21 dixaines de sols, ou 10 l. 10 s.: je mets 1 devant les 4 s. déjà trouvés, et je retiens 10 l., que j'ajoute au produit 2592 l. de 216 l. par 12. La dépense cherchée est donc de 2602 l. 14 s.

3°. Si le multiplicateur pouvoit se décomposer en plusieurs facteurs, qui ne surpassassent pas 12, l'opération seroit plus courte, en multipliant successivement par ces facteurs. Ainsi soit pris l'exemple 1, où le multiplicateur étoit 132, que nous savons valoir 11 fois 12. Je multiplierois d'abord le multiplicande 216 l. 17 s. 10 d. par 11 ou 12; par 12 par exemple, et j'aurois, comme ci-dessus, 2602 l. 14 s. Alors multipliant le produit par 11, je trouverois, en commençant par les sols, 28629 l. 14 s., comme ci-dessus. Soit encore proposé de savoir combién coûteroient 384ᵗ, à raison de 11 l. 7 s. 11 d. $\frac{7}{8}$ la toise. Je vois (151) que 384 est divisible par 12, le quotient est 32 ou 4 fois 8. Donc, au lieu de multiplier par 384, je puis multiplier successivement par 12, par 4 et par 8, en suivant l'ordre que je voudrai: je prends d'abord 8 pour faire évanouir la fraction, et je dis: 8 fois $\frac{7}{8}$ de denier font 7 d. que je retiens; et continuant, comme ci-dessus, je trouve que 8 fois 11 l. 7 s. 11 d. $\frac{7}{8}$ font 91 l. 3 s. 11 d.; ensuite que 12 fois ce produit donnent 1094 l. 7 s.; et enfin, que 4 fois ce second produit, donnent pour réponse 4377 l. 8 s.; ce qui est beaucoup plus court que si l'on eût fait la regle tout au long: A cause de la fraction $\frac{7}{8}$, nous mettrons ici la regle.

	11 l.	7 s. 11 d. $\frac{7}{8}$
	384	
	4224 l.	
Pour 6 s.	115	4 s.
1 s.	19	4
6 d.	9	12
3 d.	4	16
2 d.	3	4
$\frac{4}{8}$	0	16
$\frac{2}{8}$	0	8
$\frac{1}{8}$	0	4
	4377 l.	8 s.

On observera seulement que, pour les $\frac{7}{8}$ de denier, nous les avons décomposés en $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ et $\frac{1}{8}$; que $\frac{4}{8}$ d. valant $\frac{1}{2}$ d., nous avons pris le $\frac{1}{4}$ du produit de 2 d.; et qu'ensuite, pour $\frac{2}{8}$, nous avons pris la moitié du produit de $\frac{4}{8}$; et enfin pour $\frac{1}{8}$, la $\frac{1}{2}$ du produit de $\frac{2}{8}$.

194. Ces exemples une fois bien compris, il sera bien aisé de savoir multiplier, l'un par l'autre, deux nombres complexes. En effet, si l'on demandoit combien on feroit faire d'ouvrage pour 154 l. 12 s. 6 d., à raison de 1 l. pour $35^t\ 5^p\ 8^p$? Après avoir trouvé (191) que pour 154 l., on feroit faire $5535^t\ 2^p\ 8^p$, on diroit : puisque pour 1 l. on fait faire $35^t 5^p 8^p$, pour 10 s. on en fera faire la $\frac{1}{2}$, ou $17^t\ 5^p\ 10^p$; et ensuite, pour 2 s. 6 d. qui est $\frac{1}{4}$ de 10 s., on fera faire le quart de $17^t\ 5^p\ 10^p$, ou $4^t\ 2^p\ 11^p\ 6^l$. Rassemblant ces trois produits, on trouve que pour 154 l. 12 s. 6 d., on fera faire $5557^t\ 5^p\ 5^p\ 6^l$.

Si au contraire on avoit eu cette question à résoudre; la toise d'un certain ouvrage vaut 154 l. 12 s. 6 d., à combien reviendront $35^t\ 5^p\ 8^p$ de cet ouvrage? On opérera alors comme il suit :

I.

		154 l.	12 s.	6 d.	
		35 t.	5 p.	8 p.	
		770 l.			
		462			
Pour	10 s.	17	10 s.		
	2 s. 6 d.	4	7	6 d.	
Pour	3 P	77	6	3	
	2 P	51	10	10	
	8 P	17	3	7	$\frac{1}{3}$
		5557 l.	18 s.	2 d.	$\frac{1}{3}$

Les détails de la regle précédente sont trop simples pour avoir besoin d'explication : nous observerons seulement qu'on pourroit appliquer ici les abbréviations de l'article 193. En effet, 1°. 35 étant 7 fois 5, on multiplieroit d'abord 154 l. 12 s. 6 d. par 5, ce qui donneroit 773 l. 2 s. 6 d. ; ensuite ce produit par 7, et on auroit 5411 l. 17 s. 6 d. : Et, 2°. 5 P 8 P étant 1^t moins $\frac{1}{18}$, il faudroit prendre 154 l. 12 s. 6 d. moins le $\frac{1}{18}$ de ce même nombre, qui vaut 8 l. 11 s. 9 d. $\frac{2}{3}$; le reste est 146 l. 0 s. 8 d. $\frac{1}{3}$; ajoutant alors 5411 l. 17 s. 6 d., et 146 l. 0 s. 8 d. $\frac{1}{3}$, on auroit encore 5557 l. 18 s. 2 d. $\frac{1}{3}$.

195. Nous avons eu principalement pour objet, dans les deux regles ci-dessus, de montrer comment, avec les mêmes facteurs, le produit avoit cependant des unités différentes. Les deux exemples ci-dessous sont destinés à faire voir sur-tout comment on doit opérer sur les fractions que contiennent les différens produits. Soit donc proposé d'abord de chercher combien, à 49 l. 17 s. 8 d. le marc d'argent, coûteront $37^m\ 5^o\ 4^g\ 0^{d}\ 19^{gr}$? On voit que le produit doit être des livres ; j'écris donc :

I I.

		49 l.	17 s.	8 d.		
		37 M.	5 °.	4 g. 0 d		19 gr.
		343 l.				
		147				
1°. pour..	16 s.	29	12 s.			
	1 s.	1	17			
	8 d.	1	4	8 d.		
2°. pour..	4 °.	24	18	10		
	1 °.	6	4	8	$\frac{1}{2}$....	2
	4 g.	3	2	4	$\frac{1}{4}$....	12
	1 d.		8	2	$\frac{17}{48}$....	2
	12 gr.		2	7	$\frac{17}{96}$....	2
	6 gr.		1	3	$\frac{113}{192}$....	6
	1 gr.			2	$\frac{689}{1152}$	
		1880 l.	3 s.	8 d. $\frac{131}{1152}$		

Addition des fractions.

1
2
———
2
1
———
3
12
———
36
2
———
72
17
———
89
2
———
178
113
———
291
192
———
1 99
6
———
594
689
———
1283
1152
———
1 131

Après avoir multiplié d'abord comme à l'ordinaire, 49 l. 17 s. 6 d. par 37^{m}, je dis : 1^{m} coûtant cette somme, 4° n'en coûteront que la moitié, ou 24 l. 18 s. 10 d. puis 1 ° coûtera le quart de 24 l. 18 s. 10 d., ou 6 l. 4 s. 8 d. $\frac{1}{2}$; 4^{g} comme valant $\frac{1}{2}$ once, vaudront 3 l. 2 s. 4 d. $\frac{1}{4}$. Mais ici, pour me ressouvenir de la loi que suivent les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, je mets un 2 à la suite du 2 de $\frac{1}{2}$, ce qui m'indiquera dans la suite par quel nombre il faut multiplier les deux termes de

la fraction $\frac{1}{2}$ pour avoir des quarts ; il me reste à présent à prendre pour 19^{gr} ; on voit que si on avoit le prix pour 1 d., on pourroit pour 12 grains en prendre la moitié ; faisons donc le faux produit de 1d., c'est-à-dire, prenons le 12e du prix de 4^{g}, puisque 4^{g} font 12 d. Or, d'abord le 12e de 3 l. 2 s. 4 d. $\frac{1}{4}$ fait 5 s. 2 d., et il reste 4 d. $\frac{1}{4}$ ou $\frac{17}{4}$ de denier, dont le 12e est $\frac{17}{48}$: alors, après avoir écrit pour le faux produit de 1 d. 5 s. 2 d. $\frac{17}{48}$ que je barre, j'écris 12 à la suite du dénominateur 4 de la fraction $\frac{1}{4}$, ce qui m'indiquera qu'en multipliant par 12 les deux termes de cette fraction, j'aurai des 48es de d., fract. de même espèce que la suivante : à présent je puis prendre pour 12 d. la $\frac{1}{2}$ de 5 s. 2 d. $\frac{17}{48}$ qui est de 2 s. 7 d. $\frac{17}{96}$, et je mets un 2 à la suite de 48 : prenant ensuite pour 6^{gr}, moitié de 12^{gr}, la moitié de 2 s. 7 d. $\frac{17}{96}$, j'ai 1s. 3 d. $\frac{113}{192}$, et je mets encore un 2 à la suite de 96. Enfin, 1^{gr} étant le $\frac{1}{6}$ de 6^{gr}, je prends le $\frac{1}{6}$ de 1 s. 3 d. $\frac{113}{192}$, qui est d'abord de 2 d. pour 1 s. il reste donc 3 d. $\frac{113}{192}$ qui font $\frac{689}{192}$ dont le 6e est $\frac{689}{1152}$, que j'écris, après avoir mis un 6 à la suite de 192. Il ne reste plus qu'à faire l'addition, et pour cela je commence par les fractions, que j'ajoute comme on l'a enseigné (164) en disant 2 fois 1 font 2, qui joints à 1, font 3 ; 12 fois 3 font 36, je n'ajoute rien, parce que $\frac{17}{48}$ appartient à un faux produit. Je continue en disant : 2 fois 36 font 72, et 17 font 89 ; ensuite 2 fois 89 font 178, et 113 font 291. Ici le numérateur 291 étant plus grand que le dénominateur correspondant 192, je retranche 192 de 291, et j'écris 1 entier, et 99 pour reste ; je multiplie enfin 99 par 6, j'ai pour produit 594, qui ajoutés à 689, font 1283, dont j'ôte 1152 : j'écris 1 entier, et $\frac{131}{1152}$ pour reste ; alors portant ce reste à la somme, et retenant 2, j'ajoute reste comme à l'ordinaire, et je trouve pour réponse à la question 1880 l. 3 s. 8 d. $\frac{131}{1152}$.

196. On voit par-là que pour multiplier l'un par l'autre deux nombres complexes, il faut d'abord

multiplier comme si le multiplicateur étoit incomplexe, et ensuite décomposer les unités inférieures du multiplicateur en parties aliquotes les unes des autres, qu'on prendra sur le multiplicateur total et sur les quotiens successifs qu'il fournira : Enfin faire l'addition des fractions, s'il y en a, comme il a été indiqué (164).

Sur quoi on observera 1°. que, pour ne pas altérer l'ordre des fractions, il faudra toujours décomposer les parties aliquotes, de manière à ce que chacune d'elles se déduise du produit qui précède immédiatement. 2°. Que s'il y avoit deux suites de fractions, on se serviroit de la méthode donnée (165). Cela posé, on entendra facilement l'exemple suivant, où d'ailleurs on a détaillé les opérations. A 793 l. 17 s. 5 d. $\frac{4}{7}$ le marc d'or, combien coûteront 87^{m}. 6°. 5^{g}. 2^{d}. 22^{gr}. $\frac{29}{72}$?

		793 l.	17 s.	5 d. $\frac{4}{7}$			
		87 M.	6°.	5 g.	2 d.	22 gr. $\frac{29}{72}$.	
		5551 l.					
		6344					
1°.	p. 16 s.	69	12 s.				
	1 s.	4	7				
	4 d.	1	9				
	1 d.		7	3 d.			
	$\frac{1}{7}$		1	0	$\frac{3}{7}$		
	$\frac{3}{7}$		3	1	$\frac{2}{7}$ . . .	2	
2°.	p. 4°.	396	18	8	$\frac{11}{14}$ . . .	2	
	2°.	198	9	4	$\frac{11}{28}$ . . .	4	1
	4 g.	49	12	4	$\frac{11}{112}$ . . .	4	
	1 g.	12	8	1	$\frac{11}{448}$ . . .	3	
	1 d.	4	2	8	$\frac{459}{1344}$		
	1 d.	4	2	8	$\frac{459}{1344}$ . . .	2	
	12 gr.	2	1	4	$\frac{459}{2688}$ . . .	2	
	6 gr.	1	0	8	$\frac{459}{5376}$ . . .	2	
	3 gr.		10	4	$\frac{459}{10752}$ . . .	3	
	1 gr.		3	5	$\frac{11211}{32256}$ . . .	3	
	$\frac{24}{72}$		1	1	$\frac{75723}{96768}$ . . .	6	
	$\frac{4}{72}$			2	$\frac{172491}{180608}$ . . .	4	
	$\frac{1}{72}$				$\frac{1333707}{2322432}$		
		69736 l.	10 s.	5 d. $\frac{773317}{774144}$			

Addition des fractions.

3	2337
2	2
5	4674
2	459
10	5133
11	2
21	10266
14	459
7	10725
2	3
14	32175
11	11211
25	43386
4	32256
100 1	11130
11	3
111	33390
4	75723
444	109113
11	96768
455 1	12345
448	6
1 7	74070
3	172491
21	246561
459	4
459	986244
939	1333707
2	2319951
1878	2322432
459	ou
2337	$\frac{773317}{774144}$

Nous observerons que les opérations sur les fractions eussent été plus simples, si lorsqu'on prenoit

pour 1 d. le $\frac{1}{3}$ d'un gros, et qu'il restoit $\frac{459}{448}$, on eût divisé le numérateur par 3, au lieu de multiplier le dénominateur par 3. Mais comme ces opérations sont assez compliquées, il vaut mieux, au risque d'avoir des nombres un peu plus grands, suivre constamment la même marche, que de risquer à s'égarer, en tentant une voie qui réussit fort rarement.

197. Au reste, quand les multiplications sont aussi embarrassées, il vaut mieux les ramener à une simple multiplication de fractions, de la maniere suivante. D'abord on réduira les 793 l. en sols, ce qui fera, avec les 17 s., 15877 s., qu'on réduira encore en deniers, et on aura avec les 5 den. du multiplicande, 190529 d., qu'on réduira enfin en 7es. de deniers, ce qui fera, avec les $\frac{4}{7}$, $\frac{1333707}{7}$ de deniers, ou $\frac{1333707}{1680}$ l. On trouvera par un procédé analogue que le multiplicateur vaut $\frac{29144333}{72}$ de grains, ou $\frac{29144333}{331776}$ de marc. La regle est donc réduite à multiplier $\frac{1333707}{1680}$ l. par $\frac{29144333}{331776}$: il faut donc multiplier entr'eux les numérateurs et les dénominateurs: or le produit de 29144333 par 1333707 est 38870000932431; celui de 331776 par 1680 est 557383680; donc la fraction-produit est $\frac{38870000932431}{557383680}$ liv. Divisant le numérateur par le dénominateur, on trouve d'abord 69736 liv., et le reste 292623951; pour trouver les sols, au lieu de multiplier ce reste par 20, je divise 557383680 par 20, ce qui donne 27869184. Le quotient est 10 sols, avec le reste 13932111 s. que je divise par le 12e de 27869184, ou par 2322432; le quotient est 5 d. avec la fraction restante $\frac{2319951}{2322432}$, ou $\frac{773317}{774184}$, comme ci dessus.

198. Il ne nous reste plus qu'à parler de la division d'un nombre complexe par un nombre complexe; et d'abord, comme dans celle d'un nombre complexe par un nombre incomplexe, nous distinguerons trois cas, savoir; d'abord celui où le quotient doit être de même espèce que le dividende, et ensuite

ceux où, devant être d'une espèce différente, il doit être un nombre abstrait ou un nombre concret.

Voyons d'abord le cas où le quotient doit être de même espece que le dividende. Pour cela, soit proposé de savoir quel est le prix de la toise, en supposant que 18 toises 4 pieds 6 pouces aient coûté 99 l. 15 s. 6 d. : Il est clair que si l'on connoissoit le prix de la toise, on auroit 99 l. 15 s. 6 d. en répétant ce prix, autant de fois que la toise est contenue dans 18 t. 4 P. 6 p., c'est-à-dire, 18 fois $\frac{3}{4}$, puisque 4 P. 6 p. sont les $\frac{3}{4}$ de 1 t. : Il suit donc de-là, que l'on doit considérer 99 l. 15 s. 6 d. comme un produit dont l'un des facteurs est le nombre concret qui doit donner en livres, sols et deniers, le prix de la toise, et dont l'autre est le nombre abstrait 18 $\frac{3}{4}$. Donc, si l'on divise par 18 $\frac{3}{4}$, ou par $\frac{75}{4}$, 99 l. 15 s. 6 d., on aura le prix cherché : or (171) on a vu que, pour diviser par une fraction, il falloit multiplier par cette même fraction renversée ; il faudra donc multiplier le dividende 99 l. 15 s. 6 d. par 4, et ensuite diviser le produit par 75, ce qui se fera par les règles données pour la multiplication et la division des nombres complexes par un nombre incomplexe. On a vu (194) qu'à 35 t. 5 P. 8 p. pour 1 l. on feroit faire 5557 t. 5 P. 5 p. 6 l. pour 154 l. 12 s. 6 d. Si l'on proposoit maintenant cette question : Si pour 154 l. 12 s. 6 d. on fait faire 5557 t. 5 P. 5 p. 6 l., combien a-t-on de toises pour 1 l. : on voit, qu'en supposant connu le nombre de toises qu'on cherche, et qui est ici, 35 t. 5 P. 8 p., il suffiroit, pour trouver 5557 t. 5 P. 5 p. 6 l., de répéter 35 t. 5 P. 8 p., autant de fois que la livre est contenue dans 154 l. 12 s. 6 d., c'est-à-dire, 154 fois $\frac{5}{8}$, puisque 12 s. 6 d. font $\frac{5}{8}$ de liv. Donc, si on divise 5557 t. 5 P. 5 p. 6 l. par ce nombre abstrait, c'est-à-dire, par 154 $\frac{5}{8}$, ou par $\frac{1237}{8}$, on doit avoir le nombre de toises cherché : on voit donc que dans ce nouvel exemple, il faudra multiplier par $\frac{8}{1237}$.

c'est-à-dire, multiplier 5557 t. 5 P. 5 p. 6 l. par 8, et diviser le produit par 1237; ce qu'on fera par les régles connues. Voici maintenant les deux opérations.

1°. 99 l. 15 s. 6 d.
4
399 l. 2 s. 0 d. { 75 | 5 l. 6 s. $5\frac{3}{25}$
24
20
482 s.
32
12
384 d.
..9

2°. 5557 t. 5 P. 5 p. 6 l.
8
44463 t. 1 P. 8 p. { 1237 | 35 t. 5 P. 8 p.
7353
1168 t.
6
7009 P.
824 p.
12
9896 p.
0000

199. Nous pouvons donc conclure que, pour diviser deux nombres complexes l'un par l'autre, dans le cas où le quotient doit être de même nature que le dividende, il faut réduire le diviseur en unités de la plus petite espèce qu'il contienne; eusuite multiplier le dividende par le nombre qui marque combien cette unité de la plus petite espece est contenue dans l'unité principale du diviseur, et enfin diviser le produit par le diviseur ainsi réduit. Terminons ce qui regarde

ce premier cas de la division des nombres complexes, par faire la preuve de l'exemple donné (197). On y voit qu'à 793 l. 17 s. 5 d. $\frac{4}{7}$ le marc d'or, 87 M. 6 o. 5 g. 2 d. 22 gr. $\frac{19}{72}$ avoient coûté 69736 l. 10 s. 5 d. $\frac{773317}{774144}$. Il faut donc que ce dernier nombre, divisé par 87 M. 6 o. etc., ou plutôt par $\frac{29144333}{331776}$ (171) ou multiplié par $\frac{331776}{29144333}$, donne 793 l. 17 s. 5 d. $\frac{4}{7}$ pour le prix du marc d'or.

69736 l. 10 s. 5 d. $\frac{773317}{774144}$
331776
―――――――――――
418416 l.
488152.
488152..
69736...
209208....
209208.....
p^r. 10 s...... 165888
4 d......... 5529...12 s.
1 d......... 1382....8
$\frac{773317}{774144}$....... 1380....18 s. 5 d. $\frac{4}{7}$ { 29144333
23136905316 l. 18 s. 5 d. $\frac{4}{7}$ { 793 l. 17 s. 5 d. $\frac{4}{7}$
273587221
112882246
25449247 l.
20
―――――
508984958 s.
217541628
13531297 s.
12
―――――
162375569 d.
16653904
7
―――――
116577332
000000000

Nous ferons une observation relativement à la multiplication qui fait la premiere partie de cette regle. Si, après avoir trouvé pour 1 d., 1382 l. 8 s., on eût voulu prendre sur ce produit, pour $\frac{773317}{774144}$ de denier, en décomposant cette fraction en parties aliquotes de l'entier, comme en $\frac{387072}{774144}$ ou $\frac{1}{2}$, $\frac{193536}{774144}$ ou $\frac{1}{4}$ etc., jusqu'à ce que la somme de tous les numérateurs 387072, 193536, etc. atteignît le numérateur 773317, on sent que cette suite d'opérations deviendroit fort longue : On se les épargnera, en réfléchissant qu'il ne s'agit que de répéter 331776 fois la fraction $\frac{773317}{774144}$ de denier. Mais avant de multiplier 773317 par 331776 (169), et de diviser le produit par 774144, on verra si les deux nombres 331776 et 774144 n'auroient pas des facteurs communs. On cherchera donc (158) leur plus grand commun diviseur, et on trouvera que 110592 divise ces deux nombres, et que les quotiens sont 3 et 7, multipliant donc 773317 par 3, et divisant le produit par 7, on aura $\frac{2319951}{7}$ de denier, ou 331421 d. $\frac{4}{7}$, ou 1380 l. 18 s. 5 d. $\frac{4}{7}$. On pourroit aussi ramener cette division à celle d'une fraction par une fraction, en réduisant 69736 l. 10 s. 5 d. $\frac{773317}{774144}$ tout en 774144emes de livre, ce qui donneroit $\frac{129566669774\,77^{\text{emes}}}{774144}$ de livres, ou $\frac{12956666977477}{185794560}$ de 774144es de denier. Si l'on divise à présent cette fraction par la fraction $\frac{29144333}{331776}$, ou si on la multiplie par $\frac{331776}{29144333}$, on aura, en divisant le dénominateur 185794560, et le numérateur 331776 par 331776, qui est lui-même leur plus grand commun diviseur, $\frac{12956666977477}{560}$ à multiplier par $\frac{1}{29144333}$; ce qui donnera $\frac{12956666977477}{16320826480}$ de livre, ou 793 l. 17 s. 5 d. $\frac{116577332}{204010331}$, qui se réduit à $\frac{4}{7}$, en divisant les deux termes par leur plus grand commun diviseur 29144333.

200. Cette méthode des fractions, qu'il seroit trop long d'employer dans le cas précédent de la division complexe, va nous servir pour celui où

le quotient est d'une espece différente du dividende : d'abord voyons le cas où ce quotient doit être abstrait, parce que l'autre se déduira facilement de celui-ci. Soit donc proposé de savoir combien de fois $36^{tt}\,9^{s}\,2^{d}$ contiennent $5^{tt}\,4^{s}\,2^{d}$. On voit qu'il faut ramener la question à la division de deux nombres abstraits, et par conséquent incomplexes ; et c'est à quoi je vais parvenir de la maniere suivante : d'abord je réduis $36^{tt}\,9^{s}\,2^{d}$ et $5^{tt}\,4^{s}\,2^{d}$ en $\frac{8750}{240}$ de livres, et en $\frac{1250}{240}$ de livres, ou en $\frac{875}{24}$ et en $\frac{125}{24}$ de livres. Alors j'observe, 1°. que $\frac{875}{24}$ de livres contiennent $\frac{125}{24}$ de livres, comme 875^{tt} contiennent 125^{tt} ; et 2°. que 875^{tt} contiennent 125^{tt}, comme 875 contiennent 125 ; divisant donc 875 par 125, j'ai 7 fois, en réponse à la question proposée. Si on eût demandé combien de fois $15^{t}\,5$ sont contenus dans $108^{t}\,4^{p}\,3^{p}\,6^{l}$, j'eusse réduit d'abord le dividende $108^{t}\,4^{p}\,3^{p}\,6^{l}$ en lignes, et j'eusse eu 93930 lignes, ou $\frac{93930}{864}$ de toises : Le diviseur $25^{t}\,5^{p}$ eût donné, en le réduisant en lignes, c'est-à-dire, à l'unité de la plus petite espece qui soit dans le dividende, $\frac{13680}{864}$ de toises. Effaçant donc le dénominateur commun 864, et regardant les numérateurs comme abstraits, j'aurois eu à diviser 93930 par 13680, ou plutôt en ôtant les zéros, et prenant le tiers, 3131 par 456, ce qui eût donné pour le quotient cherché 6 fois et $\frac{395}{456}$ de fois.

On voit donc que, pour diviser deux nombres complexes l'un par l'autre, dans le cas où le quotient doit être abstrait, il faut réduire les deux nombres à la plus petite espèce qui soit dans tous deux, ou dans l'un d'eux ; ensuite diviser l'un par l'autre les nombres ainsi réduits, en les regardant comme abstraits, et par conséquent mettre le reste de la division, s'il y en a, sous la forme de fraction.

201. De ce cas, il est bien facile de passer à celui où le quotient doit être concret. Soit en effet proposé

Digitized by Google

de savoir combien coûteront $108^{t}.\,4^{p}.\,3^{p}.\,6^{l}.$, en supposant que $15^{t}.\,5^{p}.$ coûtent 1^{lt} ; on voit aisément que le quotient doit contenir 1^{lt}, le même nombre de fois que $108^{t}.\,4^{p}.\,3^{p}.\,6^{l}.$ contiennent $15^{t}.\,5^{p}.$, c'est-à-dire, 6 fois et $\frac{395}{456}$ de fois. Le quotient doit donc être $6\frac{395}{456}$ de fois 1^{lt}, ou $6^{lt}\,\frac{395}{456}$ de livre ; ou $6^{lt}\,17^{s}\,3^{d}\,\frac{17}{19}$. Il en seroit de même pour tout autre exemple. On voit donc que ce cas ne differe du précédent, qu'en ce qu'au lieu de regarder la fraction comme abstraite, on l'évalue en parties de l'unité principale du quotient.

Des nouvelles Mesures.

202. Nous avons promis (17) de parler des valeurs des nouvelles unités, et de leurs rapports avec les anciennes ; c'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

Ce qu'on vient de dire sur les nombres complexes, fait voir combien leur calcul est long et compliqué ; et l'on verra que cela ne pouvoit être autrement, si l'on observe, 1°. que pour mesurer, par exemple, les distances et les longueurs, on avoit une foule de mesures toutes différentes, comme la lieue marine, la lieue terrestre, la lieue moyenne, la brasse, le pas géométrique, le pas ordinaire, la toise, l'aune, le pied, le pouce, la ligne, etc. (sans compter les mesures étrangeres, le mille, le werste, etc.) premier défaut qui rend la nomenclature des anciennes mesures pénible et fastidieuse : 2°. que toutes ces mesures, en quelque genre que ce soit, ne partant d'aucun point fixe, ne reposant sur aucune base connue et déterminée, et enfin n'offrant aucune liaison, aucune dépendance entr'elles, ne pouvoient et ne devoient former qu'un systéme vague et incohérent : 3°. que souvent, d'un lieu et même d'une lieue à l'autre, la même mesure, comme l'arpent,

la pinte, etc., sans changer de nom, changeant de valeur, il doit naître de ce défaut, une foule d'incertitudes et d'erreurs dans le commerce de la société: 4°. enfin, que les divisions et subdivisions différentes de chaque unité complexe, comme de la toise en six pieds, et du pied en douze pouces, etc., de la livre-poids en 16 onces, de l'once en huit gros, etc. contribuent encore à multiplier et à compliquer les calculs. Tels étoient les vices attachés aux anciennes unités, et auxquels le nouveau systéme est venu remédier. En effet, nomenclature très-succincte, base naturelle et déterminée, liaison intime entre toutes les nouvelles unités, adoption générale des mêmes mesures, imposée par la loi à tous les citoyens, division et subdivision des nouvelles unités, en parties décuples et sous-décuples les unes des autres; enfin par cela même uniformité et simplicité dans les calculs: tels sont les avantages qu'offre le nouveau systéme, avantages dont on sera pleinement convaincu, d'après ce qui va suivre.

203. Toutes les mesures, tant anciennes que nouvelles, peuvent se classer de la maniere suivante: 1°. les mesures de distances et longueurs, nommées aussi *linéaires*; 2°. les mesures des surfaces, qui s'appellent ou *superficielles* ou *agraires*, selon les objets auxquels on les applique; 3°. les mesures des solidités; 4°. les mesures des capacités; 5°. les mesures des pesanteurs ou les poids; 6°. enfin les mesures de monnoie ou *monétaires*.

On va voir que de l'unité de longueur ont été déduites toutes les autres. Il falloit donc d'abord la déterminer, et c'est ce qu'on a fait, en partant d'une mesure invariable, et prise dans la nature. On a choisi pour cet effet la distance du pôle à l'équateur, comptée sur notre méridien, distance qu'on a

obtenue, en calculant l'arc de ce grand cercle qui traverse la France : on a pris alors la dixmillionieme partie decette distance, fraction qu'on a trouvée, d'après les mesures les plus récentes et les plus rigoureuses, valoir 3 pieds, 0 pouce, 11 lignes 296 milliemes de ligne. Enfin on a appellé cette longueur *metre,* d'un mot grec qui signifie mesure, comme si l'on eût voulu dire, mesure fondamentale, ou mesure par excellence. On appelle ensuite *are*, l'unité de surface, et on est convenu de la représenter par un quarré qui auroit pour côté une longueur de dix metres, c'est-à-dire, par un décametre quarré. On a nommé *stère* l'unité de solidité, et on est convenu d'entendre par ce mot, la valeur d'un metre-cube, c'est-à-dire, une mesure qui auroit un metre de long, de large et de haut. Pour avoir ensuite l'unité de mesure pour les capacités, on a choisi le décimetre-cube ; c'est-à-dire une mesure creuse qui a la forme d'un cube, et qui a un dixieme de metre en longueur, largeur et hauteur, et on a donné à cette mesure le nom de *litre.* Il ne restoit plus que les poids et les monnoies. Pour les premiers, on a établi le *gramme,* qu'on a fait égal au poids d'un centimetre-cube d'eau distillée. Quant à l'unité monétaire, qu'on nomme *franc*, sa valeur est celle d'une piece contenant 9 dixiemes d'argent, avec 1 dixieme de cuivre, et son poids est de 5 grammes.

Nous avons déja vu (34) que les noms *déca, hecto, kilo* et *myria* étoient fort utiles pour exprimer en nouvelles mesures, des mesures anciennes plus ou moins considérables; nous devons dire de même que les mots *déci*, *centi*, peuvent aussi être utiles pour les cas contraires. Par exemple, si l'on vouloit mesurer de très-petites longueurs, ou de très-petits poids, au lieu de prendre pour l'unité de mesure le metre, ou le gramme pour l'unité de poids, on pourroit

choisir pour unité principale, le décimetre ou le décigramme, ou bien le centimetre ou le centigramme.

204. Comme le premier probléme que les nouvelles mesures présentent à résoudre, est de connoître le rapport qui existe entre ces mesures et les anciennes, il est utile de savoir d'abord les noms et les valeurs de celles-ci, afin de pouvoir les comparer avec les nouvelles.

Noms et valeurs des mesures anciennes les plus usitées.

1°. *Pour les longueurs.*

La petite lieue, ou la lieue terrestre, ou enfin la lieue de 25 au degré, est de 2280 toises 329218, selon les mesures les plus récentes.

La grande lieue, ou la lieue marine, ou enfin la lieue de 20 au degré, est de 2850^{t}, 411523.

La perche de 22 pieds vaut $3^{t}\,4^{p}$.

La perche de 18 pieds vaut 3^{t}.

La toise vaut 6 pieds.

L'aune de Paris vaut $3^{p}\,7^{p}\,10^{l}\,\frac{5}{6}$.

Le pied vaut 12 pouces.

Le pouce vaut 12 lignes.

La ligne vaut 12 points.

2°. *Pour les surfaces.*

La lieue quarrée.

L'arpent (eaux et forêts) vaut 100 perches quarrées (de 22 pieds), ou 1344,444... toises quarrées.

L'arpent (de Paris) vaut 100 perches quarrées (de 18 pieds), ou 900 toises quarrées.

La perche de 22 pieds quarrés.

La perche de 18 pieds quarrés.

La toise quarrée vaut 36 pieds quarrés, ou 6 toises-pieds.

L'aune quarrée vaut 0,371808236 toise quarrée.

Le pied quarré vaut 144 pouces quarrés.

Le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées.

La toise-pied vaut 12 toises pouces.

La toise-pouce vaut 12 toises-lignes.

La toise-ligne vaut 12 toises-points.

3°. *Pour les solidités et les bois.*

La corde de bois (eaux et forêts) a 4 pieds de haut, 8 de large et 3 ½ de long, ou vaut 112 pieds-cubes.

La solive (charpente) vaut 3 pieds-cubes.

La toise-cube vaut 216 pieds-cubes, ou 6 toises-toises-pieds.

Le pied-cube vaut 1728 pouces-cubes.

Le pouce-cube vaut 1728 lignes-cubes.

La toise-toise-pied vaut 12 toises-toises-pouces.

La toise-toise-pouce vaut 12 toises-toises-lignes.

La toise-toise-ligne vaut 12 toises-toises-points.

4°. *Pour les capacités.*

Le muid de vin (de Paris) contient 288 pintes.

La pinte.

Le septier de blé (de Paris) contient 12 boisseaux.

Le boisseau contient 16 litrons.

Le litron.

5°. *Pour les pesanteurs.*

Le tonneau de mer pese 2000 livres.

Le quintal pese 100 livres.

La livre pese 16 onces.

L'once pese 8 gros.

Le gros pese 72 grains.

6°. *Pour les monnoies.*

Le louis vaut 24 livres tournois.
La livre tournois vaut 20 sols.
Le sol vaut 12 deniers.

205. Voici maintenant les différentes questions qu'on peut proposer sur les anciennes et nouvelles mesures. 1°. réduire chaque unité nouvelle en ancienne, et réciproquement ; 2°. réduire un nombre quelconque d'unités nouvelles en anciennes, et réciproquement ; 3°. connoissant le prix d'une mesure ancienne, trouver celui de la mesure correspondante nouvelle, et réciproquement. On va voir que tous ces problémes rentrent les uns dans les autres, et se résolvent avec la plus grande facilité ; et d'abord commençons par les longueurs, et pour cela cherchons la valeur du metre et de ses décuples et sous-décuples en toises, et fractions tant ordinaires que décimales de la toise. Puisque le metre vaut $3^{p}\ 0^{p}\ 11^{l},296$, si l'on réduit ce nombre en fraction de toise, on verra qu'il est égal à 443 lignes, plus 0,296 de ligne ; donc parce qu'un millieme de ligne est la 864000e partie de la toise, $3^{p}\ 0^{p}\ 11^{l},296$ ou un metre valent $\frac{443296}{864000}$ de toise, ou en divisant les deux termes par 32, le metre vaut $\frac{13853}{27000}$ de toise, ou $0^{t},513074074...$ A présent l'on voit aisément que le décametre vaut ou $5^{t},13074074...$ ou $5^{t}\ 0^{p}\ 9^{p}\ 4^{l},96$; que l'hectometre vaut $51^{t},3074074...$ ou $51^{t}\ 1^{p}\ 10^{p}\ 1^{l},6$; que le kilometre vaut $513^{t},074074...$ ou $513^{t}.\ 0^{p}.\ 5^{p}\ 4^{l}$, enfin que le myriametre vaut $5130^{t},74074...$ ou $5130^{t}\ 4^{p}\ 5^{p}\ 4^{l}$. En descendant au contraire, on verra que le décimetre vaut $0^{t},513074...$ ou $0^{t}\ 0^{p}\ 3^{p}\ 8^{l},3296$; ou $0^{p},3078444...$ ou $3^{p},6941333$; que le centimetre vaut $0^{t},00513074...$ ou $0^{t}\ 0^{p}\ 0^{p}\ 4^{l},43296...$ ou $0^{p},36941333...$ ou $4^{l},43296$.

Réciproquement la toise doit contenir le metre, autant que 6^{p} contiennent $3^{p}\ 0^{p}\ 11^{l},296$, ou autant que 864000 milliemes de lignes contiennent 443296 milliemes de lignes ; donc la toise est les $\frac{864000}{443296}$ du metre ; c'est-à-dire qu'on trouvera la valeur de la toise en metre, en renversant la fraction qui donnoit la valeur du metre en toise : si l'on évalue $\frac{864000}{443296}$ ou $\frac{27000}{13853}$ en metre et décimales du metre, on verra que la toise vaut $1^{m},9490363098246$; donc 1°. le pied vaut le 6e de ce nombre, ou $0^{m},3248393849708$; 2°. le pouce vaut le 12e de celui-ci, ou $0^{m},0270699487476$, ou $0^{decim},270699487476$; 3°. la ligne vaut le 12e de cette quantité, ou $0^{d.m.},0225582906\,23$ ou $0^{centim.},2255829062\,3$; enfin 4°. le point vaut le 12e de ce nombre, ou $0^{c.t.},01879857552$, ou. . . . . $0^{millim},1879857552$.

Quant à l'aune, on observera que, puisqu'elle vaut $3^{}\ 7^{p}\ 10^{l}\ \frac{5}{6}$ ou $\frac{3161}{5184}$ de toise, et que la toise vaut $\frac{27000}{13853}$ du metre, il s'ensuit que l'aune vaut les $\frac{3161}{5184}$ des $\frac{27000}{13853}$ du metre, ou en divisant 5184 et 27000 par 216 (167) les $\frac{3161}{24}$ des $\frac{125}{13853}$ du metre, ce qui donne en décimales $1^{m},18844594$; donc réciproquement le metre valant $\frac{13853}{27000}$ de toise, tandis que la toise vaut $\frac{5184}{3161}$ d'aune ; le metre vaudra les $\frac{13853}{27000}$ des $\frac{5184}{3161}$ d'aunes, ou les $\frac{13853}{125}$ des $\frac{24}{3161}$ d'aunes, où l'on voit que pour ce cas la fraction-produit est l'inverse du premier. Evaluant en décimales cette fraction, on trouvera que le metre vaut $0^{a},841434989$.

206. Il ne sera pas plus difficile de déterminer les valeurs des autres mesures de longueurs : en effet, veut-on savoir d'abord combien vaut en metres la perche de 18 pieds ; on voit qu'il faut prendre 18 fois la valeur du pied, ou plus briévement, puisque 18 pieds font 3 toises, prendre 3 fois la valeur de la toise, qui est $1^{m},9490363\cdot1$, ce qui donnera $5^{m},84710893$. Pour celle de 22 pieds ou de $3^{t}\ 4^{p}$, on ajouteroit à la valeur

de celle de 18 pieds les $\frac{2}{3}$ de $1^{m}.9490363$1, qui sont $1^{m},29935754$, et on aura $7^{m},14646647$ pour la valeur de la perche de 22 pieds. Réciproquement, puisque le metre vaut $0^{t},513074074074$... il ne vaudra en décimales de la perche de 3 toises, que le tiers de ce nombre, ou $0^{per.},1710246913$58... Quant à celle de 22 pieds, on trouvera que, puisque le metre vaut $3^{r},078444$... il doit, en prenant le 22e de ce nombre, valoir $0^{per.},1399292929$..

Si l'on veut maintenant réduire les différentes sortes de lieues en metres, on saura d'abord que tout cercle se divise en 360 degrés; le quart de cercle en vaut donc 90. Donc aussi, puisque le quart de cercle vaut 10000000 de metres, 90 degrés vaudront ce nombre de metres; le degré vaudra donc $\frac{10000000}{90}$ ou $\frac{1000000}{9}$ de metres, on $\frac{1000}{9}$ de kilometres. Pour avoir à présent la lieue de 20 ou 25 au degré, il ne faudra donc plus que diviser 1000 par 20 ou 25, ce qui donnera 50 ou 40: la lieue de 20 vaudra donc $\frac{50}{9}$ de kilometres, ou $5^{kil.},5555$... et celle de 25 en vaudra $\frac{40}{9}$ ou $4^{kil.},444$... Donc réciproquement, le kilometre vaudra $\frac{9}{50}$ ou 0,18 de lieue de 20 au degré, et $\frac{9}{40}$ ou 0,225 de lieue de 25.

207. Pour pouvoir évaluer de même les mesures de surface, il faut d'abord que nous prévenions nos lecteurs, qu'on verra en Géométrie, que la surface d'un quarré se trouve, en multipliant la longueur d'un côté de ce quarré par elle-même: donc 1 toise quarrée vaut 36 pieds quarrés, en multipliant 6 pieds côté de la toise, par 6. Cela posé; veut-on avoir la toise quarrée en metres quarrés? Il faut multiplier $1^{m},9490363098246$ par lui-même, ce qu'on fera en se servant de la méthode abrégée (86). Si donc on veut se borner à huit chiffres décimaux, on multipliera comme il suit:

$$
\begin{array}{r}
1^{m},9490363098 \\
28903630949 1 \\
\hline
1949036310 \\
1754132679 \\
77961452 \\
17541327 \\
58471 \\
11694 \\
585 \\
17 \\
1 \\
\hline
\overset{m.q.}{3},798742536
\end{array}
$$

D'où il suit, 1°. que puisque la toise-pied est le 6ᵉ de la toise quarrée, la toise-pied doit valoir le 6ᵉ de 3ᵐ·ᑫ,798742536 ou 0ᵐ·ᑫ,633123756; que la toise-pouce étant le 12ᵉ de la toise-pied; la toise-ligne le 12ᵉ de la toise-pouce; la toise-point le 12ᵉ de la toise-ligne, la toise-pouce vaut 0ᵐ·ᑫ,052760313; la toise-ligne vaut 0ᵐ·ᑫ,0043966944. la toise-point vaut 0ᵐ·ᑫ,0003663912: 2°. que le pied quarré étant le 36ᵉ de la toise quarrée, ou le 6ᵉ de la toise-pied, le pied quarré vaut 0ᵐ·ᑫ,105520626; que le pouce quarré étant le 144ᵉ du pied quarré, on aura la valeur du pouce quarré, en prenant deux fois de suite le 12ᵉ de 0ᵐ·ᑫ,105520626; ce qui donne d'abord 0ᵐ·ᑫ,0087933855, et par conséquent 0ᵐ·ᑫ,0007327821. Prenant encore deux fois de suite le 12ᵉ de ce nombre, on aura d'abord 0ᵐ·ᑫ,0000610652, et ensuite.... 0ᵐ·ᑫ,0000050888 pour la valeur de la ligne quarrée. Réciproquement le metre valant 0ᵗ,513074074... Pour avoir le metre quarré, il faut multiplier ce nombre par lui-même, et en se bornant encore à huit chiffres décimaux, on aura

0^{t},513074074
4 704703150
256537037
5130741
1539222
35915
2052
36
2

t.q.
0,263245005

Si l'on prend 36 fois ce nombre, on aura 9^{pp},47682018 pour la valeur du metre quarré en pieds quarrés; prenant 144 fois ce dernier nombre, on aura 1364^{pp},66210592, pour la valeur du metre quarré en pouces quarrés: enfin prenant 144 fois ce nombre, on aura 196511^{ll},34325248 pour la valeur du metre quarré en lignes quarrées. Pour avoir la valeur du metre quarré en toises-pieds, toises-pouces, toises-lignes et toises-points, il suffira de multiplier successivement o$^{t\,q}$,263245005 par 6, ensuite le produit par 12, puis celui-ci par 12, et enfin le 3e produit par 12; et on verra que le metre quarré vaut 1$^{t\,p}$,57947003, ou 18$^{t\,p}$,95364036, ou.... 227$^{t\,l}$,44368432, ou 2729$^{t\,pts}$,32421184.

Il ne sera pas moins facile d'avoir la valeur de l'are ou du décametre quarré; car le décametre quarré valant cent metres quarrés, on voit qu'il ne faut que multiplier par 100, o$^{t\,q}$,263245005 valeur du metre quarré; l'are vaudra donc 26$^{t\,q}$,3245005.

Pour avoir maintenant la valeur de l'aune quarrée en metres quarrés, on dira: puisque l'aune quarrée vaut 0,371808236 toise quarrée, et que la toise quarrée vaut 3$^{m\,q}$,798742536, on multipliera ces deux nombres l'un par l'autre, et l'on aura 1$^{m\,q}$,412403762.

pour la valeur de l'aune quarrée; et *vice versâ*, le metre quarré valant $0^{m.q}$,263245005, tandis que l'aune quarrée vaut $0^{t.q}$,371808236; le metre quarré ne vaut donc que $\frac{0,263245005}{0,371808236}$ de l'aune quarrée, ou en évaluant cette fraction en décimales, le metre quarré vaut 0,708012841 d'aune quarrée.

La perche quarrée (de 18 pieds) valant 9 toises quarrées, on voit que pour avoir la valeur de la perche quarrée en metres quarrés, il faut multiplier par 9 le nombre $3^{m.q}$,798742536 valeur de la toise quarrée, ce qui donnera $34^{m.q}$,188682824. Quant à celle de 22 pieds, ou de $3^{t}\frac{2}{3}$, ou de $\frac{11}{3}$ de toise, comme le produit de $\frac{11}{3}$ par lui-même est de $\frac{121}{9}$ ou de 13 $\frac{4}{9}$, si on multiplie par ce nombre $3^{m.q}$,798742536, on aura $51^{m.q}$,071982984 pour la valeur de la perche quarrée de 22 pieds. On voit aussi que pour exprimer ces perches en ares, il suffit, puisque l'are vaut 100 metres quarrés; d'avancer la virgule de deux rangs vers la gauche. La perche quarrée de 18 pieds vaudra donc........ 0^{ar},34188682824, et celle de 22 vaudra 0^{a},51071982984; de plus l'arpent valant 100 perches quarrées, ces deux nombres, regardés comme des hectares, donneront les valeurs des deux sortes d'arpens. Réciproquement, si l'on veut avoir la valeur de l'are en perches quarrées ou de l'hectare en arpens, puisque l'are vaut $26^{t.q}$,3245005 et que la perche de 18 pieds en vaut 9, on voit qu'il faut prendre le 9e de 26, 3245005 qui est de 2,9249445, on aura donc $2^{perc.q}$,9249445 pour la valeur de l'are en perches quarrées de 18 pieds, ou de l'hectare en arpens de Paris. Si on divise ce même nombre 26,3245005 par $\frac{121}{9}$ on aura 1,958020698 pour la valeur de l'are en perches quarrées de 22 pieds, ou de l'hectare en arpens des eaux et forêts. Il ne reste plus à évaluer que la lieue terrestre quarrée : on peut le

faire de deux manieres, soit en l'évaluant en myriares ou myriametres, selon qu'on la regardera comme mesure agraire, ou simplement comme mesure de surface. Sous ce dernier point de vue, la lieue terrestre valant $0^{myr\ m.}4444\ldots$ ou $\frac{4}{9}$ de myriametre, la lieue quarrée vaudra donc $\frac{16}{81}$ de myriametre quarré, ou $0^{myr.q},19753086419\ldots$. De plus, le myriare valant dix mille fois cent metres quarrés ou un million de metres quarrés, tandis que le myriametre quarré en vaut dix mille fois dix mille ou cent millions, on voit que le myriare est cent fois plus petit que le myriametre quarré; donc la lieue quarrée vaut $19^{myriares},7530864197\ldots$ réciproquement le myriametre vaudra les $\frac{81}{16}$ de la lieue quarrée, ou $5^{l.q.},0625$, et le myriare vaudra $0^{l.q},050625$.

208. Nous allons passer aux mesures de solidité, en avertissant toute-fois que la solidité d'un cube s'évalue en multipliant sa longueur deux fois de suite par elle-même. Ainsi la toise ayant 6 pieds de long, la solidité d'une toise-cube est de 216 pieds-cubes, produit de 6 par 6, et encore par 6. D'après cela le metre valant $\frac{13853}{27000}$ de toise, pour avoir le metre-cube, on voit qu'il faut multiplier cette fraction deux fois de suite par elle-même, ce qui donnera $\frac{2658468401477}{19683000000000}$ de toise-cube, ou 0,135064187445 de toise-cube. De plus la toise-cube valant 6 toises-toises-pieds, celle-ci 12 toises-toises-pouces, celle-ci 12 toises-toises-lignes, enfin cette derniere 12 toises-toises-points, on voit qu'il faut multiplier successivement la valeur 0,135064187445 toise-cube du metre-cube, par 6, ce produit par 12, celui-ci par 12, et enfin le dernier par 12, pour avoir la valeur du metre cube en toises-toises-pieds, toises-toises-pouces, toises-toises-lignes et toises-toises-points; et on trouvera que le metre-cube vaut 0,810385124667 toises-toises-pieds, 9,72462149604 toises-toises-

pouces, 116,69545795248 toises-toises-lignes, et enfin 1400,34549542976 toises-toises-points. Si l'on observe ensuite que la toise-cube vaut 216 pieds-cubes et 72 toises toises-pouces, on voit qu'on aura le metre-cube en pieds-cubes, en multipliant par 3 la valeur du metre-cube en toises toises-pouces. Le metre-cube vaudra donc 29,17386448812 pieds-cubes : le pied-cube valant 1728 pouces-cubes, on aura le metre-cube en pouces-cubes, en multipliant 29,17386448812, 3 fois de suite par 12. ce qui donnera 50412,43783547136 pouces cubes, pour la valeur du metre-cube, ou 50,41243783547136 pouces-cubes pour la valeur d'un décimetre-cube, parce qu'un metre-cube vaut 1000 décimetres cubes. Si l'on multiplie ce dernier nombre trois fois de suite par 12, on aura 87112,69257969504 lignes-cubes pour la valeur d'un décimetre-cube, ou 87,11269258 lignes-cubes, pour la valeur d'un centimetre cube. Il ne reste plus qu'à réduire le metre-cube en solives et en cordes de bois. Or la premiere réduction est toute faite, puisque la solive valant 3 pieds cubes, il faut prendre le tiers de la valeur du metre-cube en pieds-cubes, tiers qu'on a vu être 9,724621496. Quant à la valeur du metre-cube en cordes, cas où le metre-cube s'appelle *stère*, on observera que la corde valant 112 pieds cubes, on aura la valeur du stere en cordes, en divisant par 112, la valeur du metre-cube en pieds-cubes. Le stere vaudra donc...... 0,26048093 de cordes.

Réciproquement, on trouvera que la toise-cube vaut 7,40388713631 6 metres-cubes, en évaluant en décimales $\frac{19683000000000}{2658468401477}$, fraction inverse de celle qui a donné en toises-cubes la valeur du metre-cube. Donc, 1°. la toise-toise-pied vaut le 6e de ce nombre, ou 1,233981189386 metres-cubes ; la toise-toise-pouce est le 12e de ce dernier nombre, et vaut par

conséquent 0,10283176578 2 metre-cube ; la toise-toise-lig. vaut le 12e de ce nombre, ou 0,00856931381 5 metre-cube, ou 8,569313815 décimetres-cubes ; et enfin la toise-toise-point vaut le 12e de ce dernier nombre, ou 0,7141094846 décimetre-cube. 2°. Le pied-cube étant le tiers de la toise-toise-pouce, vaut le tiers de sa valeur, ou 0,0342772552 61 ; le pouce-cube vaut le 1728e de ce nombre ; divisant donc ce dernier nombre trois fois de suite par 12, on aura 0,0000198363746 metre-cube, ou 0,0198363746 décimetre cube pour la valeur du pouce cube ; opérant de même sur ce dernier, on aura 0,01147938 centimetres-cubes pour valeur de la ligne-cube. Enfin pour avoir la valeur de la solive en metres-cubes, on n'aura qu'à prendre la valeur de la toise-toise-pouce, ce qui donnera 0,102831765782 ; et pour avoir la valeur de la corde en steres, comme elle vaut 112 pieds-cubes ou les $\frac{112}{216}$ d'une toise-cube, ou les $\frac{28}{54}$, ou les $\frac{27}{54}$ plus $\frac{1}{54}$ d'une toise-cube, on voit, à cause que $\frac{27}{54}$ font $\frac{1}{2}$, qu'il faut prendre la $\frac{1}{2}$ de la valeur de la toise-cube, plus le 27e de cette moitié, ce qui fera 3,8390525892 steres pour la corde de bois.

209. Passons aux mesures de capacité : en comparant ce que pourroient contenir un litre ou vase qui auroit intérieurement la forme et la valeur d'un décimétre cube, et une pinte de Paris, on a reconnu que le litre valoit 1 $\frac{73}{990}$, ou 1,07374 de pinte, à un cent-millieme près, ce qui est encore beaucoup au-delà de l'exactitude dont on peut avoir besoin. Donc, puisque le muid vaut 288 pintes, on aura la valeur du litre en muids, en divisant 1,07374 par 288, ou par 12, par 12 et par 2, ce qui donnera 0,0037283 de muid pour la valeur du litre, ou 0,37283 pour celle de l'hectolitre. On trouvera réciproquement la valeur de la pinte en litre en évaluant en décimales l'inverse

de $\frac{1063}{990}$, égal à $1\frac{73}{990}$; et on trouvera que $\frac{990}{1063}$ valent, à moins d'un cent-millieme près 0,93132 : donc la pinte vaut 0,93132 de litres : le muid vaut donc 268, 22016 litres, ou 2,68220 hectolitres. Voilà pour les mesures liquides. Voici maintenant pour les mesures sèches. On a comparé de même le litre au litron, et on a évalué que le litre valoit, à un cent-millieme près, 1,22998 de litrons. Donc, puisqu'il y a 16 litrons dans le boisseau, le litre vaut 0,0768737 de boisseau. Ensuite, puisqu'il y a 12 boisseaux dans le septier, le litre vaudra 0,00640615 de septier; l'hectolitre vaudra donc 0,64061 de muid. Réciproquement, puisque le litre vaut $\frac{122998}{100000}$ de litrons, le litron vaudra $\frac{100000}{122998}$, ou 0,813021 de litre; le boisseau vaudra 16 fois ce nombre, ou 13,008336 litres; et le muid vaudra 12 fois ce nombre; ou 156,100032 litres, ou 1,561 hectolitres.

210. Occupons-nous encore des nouveaux poids; on a trouvé par des expériences très-délicates et très-multipliées, que le kilogramme pesoit 18827,15 grains, ou $\frac{1882715}{921600}$ de la livre-poids, puisqu'elle contient 9216 grains. On aura donc la valeur du kilogramme en livres, en évaluant cette fraction en décimales, ce qui donnera 2^{lb},042876519098 ; En onces, en multipliant ce nombre par 16, ce qui fera 32°,6860243o5568; En gros, en multipliant ce dernier nombre par 8, ce qui fera 261^{g}.,488194444544 : enfin, en multipliant ce produit par 72, on retrouvera 18827^{gr}.,150000007168, c'est-à-dire, 18827^{gr}.,15, à bien peu de chose près, pour la valeur du kilogramme en grains. Pour avoir la valeur du kilogramme en quintaux, qui pesent 100 liv., et en tonneaux qui pesent 2000 livres, il ne faudra que diviser par 100 et par 2000, sa valeur en livres; on aura donc 0,020428765 et 0,001021439 pour la valeur du kilogramme en quintaux et en tonneaux.

Réciproquement, pour avoir la valeur de la livre

en kilogrammes, on évaluera $\frac{921600}{1882715}$ en décimales, et l'on trouvera que la livre pese 0,4895058466098 kilogramme : l'once vaudra donc 0$^{k.g.}$,0305911541, le gros vaudra 0,$^{k.g.}$,0038242644 3 ou 3$^{gr.}$,8242644 3. Le grain vaudra 0,^{gr} 053114784. Enfin le tonneau et le quintal vaudront 97,$^{myr.g}$·80116932 et...... 4$^{myr\ gr.}$,89505847.

211. Voyons enfin les monnoies : Si l'on compare les valeurs intrinséques de la piece d'argent de 5 francs, et de l'écu de 6 livres-tournois, on trouvera que le franc vaut 1^{lt} 0^{s} 3^{d}, ou $1\frac{3}{240}$, ou $1\frac{1}{80}$, ou $\frac{81}{80}$ de livre : donc pour avoir la valeur d'un nombre de francs en livres, il faut multiplier ce nombre par $\frac{81}{80}$; ce qui se fera très-brièvement, en ajoutant à ce nombre le huitieme de son dixieme ; ainsi 720 francs vaudront 729 livres : Car le dixieme de 720^{lt} est 72^{lt}, dont le huitieme est 9^{lt}, qui, ajoutées à 720^{lt}, font 729^{lt}. De même 544$^{f.}$ font 550^{lt} 16^{s} ; en ajoutant à 544^{lt}, 6^{lt} 16^{s}, huitieme de 54^{lt} 8^{s}, qui sont eux-mêmes le dixieme de 544^{lt}. Veut on au contraire réduire des livres-tournois en francs, on multipliera celles-là par $\frac{80}{81}$, ce qui se fera en en retranchant le neuvieme du neuvieme, puisque $\frac{80}{81}$ ne sont autre chose que 1 moins $\frac{1}{81}$, ou 1 moins le $\frac{1}{9}$ du $\frac{1}{9}$. Ainsi 729^{lt} vaudront 720$^{f.}$; en ôtant de 729^{lt}, 9^{lt} qui est le 9e de 81, qui est lui-même le neuvieme de 729 : si l'on donnoit 550^{lt} 16^{s} ; j'en prendrois d'abord le 9e, qui seroit 61^{lt} 4^{s} ; ensuite le neuvieme de 61^{lt} 4^{s}, ce qui donneroit 6^{lt} 16^{s}, que j'ôterois de 550^{lt} 16^{s}, et il resteroit 544^{lt} que je compterois pour des francs.

Au reste, ces réductions ne peuvent avoir lieu que dans des cas fort rares : Car dans le commerce ordinaire, on est convenu de regarder le franc comme égal à la livre-tournois ; et nous allons ici comparer dans cette hypothèse, les subdivisions de l'un et de l'autre : Cela posé, le franc valant 10 décimes, et

la

la livre 20 sols, il est clair que le décime vaut 2 sols; ensuite le décime valant 10 centimes, tandis que le sol vaut 12 deniers, on voit 1°. que le sol vaut 5 centimes, 2°. que le denier vaut le douzieme de 5 centimes, ou 0,4166... 3°. enfin, que le centime vaut le cinquieme d'un sol, ou de 12 deniers, c'est-à-dire $2^{d.}\frac{2}{5}$.

Si l'on réunit toutes les valeurs des mesures anciennes en nouvelles et des nouvelles en anciennes, on en pourra former le tableau qui accompagne les deux pages suivantes, et qui est poussé beaucoup plus loin que ne peuvent le demander les usages ordinaires.

212. Ce tableau va nous servir à résoudre les problêmes généraux suivans.

Problême 1. Etant donné un nombre quelconque, exprimant des mesures anciennes, le réduire en mesures nouvelles, et réciproquement. Soit proposé, par exemple, de réduire en metres et parties décimales du metre, 26 t. 5 p. 5 p. On voit que la toise valant $1,^{m}94904$, (pour abréger, dans tous les calculs suivans, nous nous bornerons à 5 chiffres décimaux, approximation d'ailleurs plus que suffisante pour les usages ordinaires,) $26^{t.}$ doivent valoir 26 fois $1^{m.},94904$; ensuite que le pied valant 3,24839 décimetres, ou $0,^{m.}32484$, il faut pour 5 pieds prendre 5 fois ce dernier nombre: enfin, que pour 5 pouces, il faut prendre 5 fois 2,70699 centimetres, ou $0^{m.},02707$, valeur du pouce, et ensuite ajouter les trois produits. Voyez le premier exemple ci-dessous. Prenons encore un autre exemple: soit $9^{lb}\ 15^{o.}\ 7^{g}\ 60^{gr.}$ à réduire en kilogrammes, on voit que la livre valant $0,^{k\,g.}48951$; que l'once valant $3,^{D.g},059412$, ou $0,^{k.g}03059$; que le gros valant $3^{g.}82426$, ou $0,^{k\,g.}00382$; et enfin que le grain valant $0^{d.g.},53115$, ou $0,^{k.g.}00005$, il faut multiplier 1°. 0,48951 par 9; 2°. 0,03059 par

15; 3°. 0,00382 par 7; 4°. 0,00005 par 60, et ensuite ajouter ces quatre produits : voyez le second exemple.

Ier. EXEMPLE.

26 fois 1^m,94904 font 50,67504
5 fois 0^m,32484 font 1,62420
5 fois 0^m,02707 font 0,13535

somme.... 52^m,43459

IIe. EXEMPLE.

9 fois $0^{k.s.}$,48951 font...$4^{k.s.}$,40559
15 fois $0^{k.s.}$,03059 font...0 ,45885
7 fois $0^{k.s.}$,00382 font...0 ,02674
60 fois $0^{k.s}$,00005 font...0 ,00300

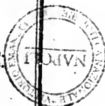
somme....... $4^{k.s.}$,89418

Réciproquement si l'on proposoit de trouver en toises, pieds, pouces, etc. la valeur par exemple de 52^m, 43459 : je verrois d'abord que le metre valant 0^t.,51307, 52^m valent 52 fois 0^t,51307, ou 26^t.,67964; on voit ensuite, sans le secours de la table, que le metre valant 0^t,51307, le décimetre vaut 0^t.,05131 ; le centimetre vaut 0^t,00513; le millimetre 0^t,00051 ; le dix-millimetre 0^t,00005, et le cent-millimétre 0,00001 ; il faudra donc multiplier le premier de ces cinq nombres par 4, le second par 3, le troisieme par 4, le quatrieme par 5, et le cinquieme par 9: voici les calculs :

52^m. valent.....26^t,67964	0^t,90275
$4^{d.m}$. valent.... 0 ,20534	6
$3^{c.m}$. valent.... 0 ,01539	5^p,41650
$4^{m.m}$. valent.... 0 ,00204	12
$5^{dim.m}$. valent... 0 ,00025	4^p,99800
$9^{cent-m.m}$. valent. 0 ,00009	
somme.....26^t,90275	

[...]uvelles en anciennes.

N[...] Valeurs.	Noms anciens.
La lieu[...] 22500000	Lieues terrestres.
La lieu[...] 18000000	Lieues marines.
La perc[...] 13992929	Perches de 22 pieds.
La perc[...] 17102469	Perches de 18 pieds.
La toia[...] 51307407	Toises.
L'aune[...] 84145409	Aunes de Paris.
Le pied[...] 30784444	Pieds.
Le pou[...] 36941333	Pouces.
La lign[...] 44329600	Lignes.
Le poin[...] 31955200	Points.
La lieu[...] 6250000 / 5062500	Lieues quarrées.
L'arp[...] 05802070	Arpents E et F.



Digitized by Google

si on réduit 0t,90275 en pieds, pouces, on trouvera 5 P. 4 p. ,998, ou 5 P. 5 p. comme ci-dessus, à fort peu de chose près.

Soit encore proposé de réduire en livres, onces, gros et grains, 4kil.g,89418 que nous avons vu ci-dessus, valoir 9℔ 15° 7g. 60gr.

4k.g. valent.....8℔,17152	0℔,99823
8h.g. valent.....1 ,63432	16
9D.g valent.....0 ,18387	5° ,98938
4g. valent......0 ,00816	9 ,9823
1d.g. vaut......0 ,00020	15°,97168
8c.g. valent.....0 ,00016	8
9℔,99823	7g ,77344
	72
	154688
	541408
	55gr,68768

J'observe d'abord que le kilogramme valant 2℔,04288, 4k.g. valent 8℔,17152; que l'hectogramme valant 0℔,20429, les 8h.g. valent 1℔,63432; que le décagramme valant 0℔,02043, les 9D.g. valent 0℔,18387; que le gramme, le décigramme et le centigramme valant successivement 0℔,0,00204, 0℔,00020 et 0℔,00002, 4g. valent 0℔,00816; 1d.g. vaut 0℔,00020; 8c.g. valent 0℔,00016. Ajoutant alors les 6 produits ci-dessus, je trouve 9℔,99823; et réduisant 0℔,99823 en fraction ordinaire de la livre-poids, j'ai 15°. 7g. 55gr. $\frac{2}{3}$ à-peu-près; au lieu de 15°. 7g. 60gr.; différence qui ne monte qu'à 4gr. $\frac{1}{3}$, et qu'on peut regarder comme insensible, sur un poids de 9 à 10 livres.

213. *Probléme II.* Etant donné le prix d'une mesure ancienne, trouver le prix de la mesure

nouvelle correspondante, et réciproquement. Soit proposé par exemple de trouver la valeur de l'hectolitre en francs, décimes et centimes, en supposant que le muid coûtoit 176 l. 11 s. 6 d. On voit que, si l'hectolitre étoit ou le double ou le triple, etc. du muid, son prix seroit évidemment double ou triple du prix du muid, et réciproquement que, s'il n'en étoit que la $\frac{1}{2}$ ou le $\frac{1}{3}$, etc., son prix ne devroit être que la $\frac{1}{2}$ ou le $\frac{1}{3}$ du prix du muid : On voit donc que, puisque l'hectolitre n'est en effet que 0,37383 du muid, son prix ne sera que 0,37283 de 176 l. 11 s. 6 d. : Donc dans ce cas et les autres semblables, il faudra multiplier le prix donné par le nombre qui exprime la valeur de la mesure nouvelle en ancienne.

Réciproquement, étant donné le prix d'une mesure nouvelle, pour trouver celui de la mesure ancienne correspondante, on verra aisément, comme ci-dessus, qu'il faut multiplier le prix donné par le nombre qui exprime la valeur de l'ancienne mesure en nouvelle. Cela posé, nous allons résoudre, 1°. le problême proposé ci-dessus; 2°. celui où l'on voudroit trouver combien vaut l'hectare, en supposant que l'arpent des eaux et forêts valût 754 l. 7 s. 6 d. : et comme ce que nous avons dit sur la multiplication des nombres complexes est plus que suffisant pour l'intelligence des regles ci-dessous, nous nous contenterons d'observer que nous avons, pour plus de commodité, échangé les places des facteurs.

	0,37283
	176₶ 11ſ 6đ
	223698
	260981
	37283
Pr 10ſ	18641 5
1ſ	1864 15
6đ	932 07
	65f,83245 72

ou 65f,83 à un centime près.

	1,95802
	754₶ 7ſ 6đ
	783208
	979010
	1370614
Pr 5ſ	48950 5
2ſ 6đ	24475 25
	1477f,08133 75

ou 1477f,08 à un centime près.

L'on voit, par ces exemples, 1°. que l'hectolitre vaut 65f, 83, et l'hectare 1477f, 08; et 2°. qu'on peut négliger sans crainte les restes qu'on trouve, en opérant pour les sous et deniers.

Soit proposé à présent de trouver le prix d'un muid, en livres, sols et deniers, en sachant que l'hectolitre coûte 65f,83, et celui de l'arpent des eaux et forêts, en sachant que l'hectare vaut 1477f, 08: il est clair qu'il faut, pour le premier cas, multiplier 65f, 83 par 2,68220 ou plutôt par 2,6822, valeur du muid en hectolitres; et pour le second cas, multiplier 1477f, 08 par 0,51072, valeur de l'arpent des eaux et forêts en hectares. Voici les deux regles, dans la premiere desquelles on a, comme ci-dessus, transposé les facteurs.

```
   2f,6822              1477,08
   65,83                0,51072
   -------              -------
   80466                295416
  214576               1033956
 134110                147708
160932                738540
-----------          ------------
176f,569226          754f,3742976
  0,569                0#,374
     20                    20
  -------              -------
 11s,380                7s,480
  0s,38                 0s,48
     12                    12
  -------              -------
  4d,56                 5d,76
```

On voit que la premiere réponse est $176^{f.}$, 569 ou (182) 176 l. 11 s. 4 d. 56, et que la deuxieme donne 754^{f}, 374 ou 754 l. 7 s. 5 d. 76 ce qui, comparé à 176 l. 11 s. 6 d. et 154 l. 7 s. 6 d., qu'on devoit avoir, fait à peine, pour le premier cas, 1 d. $\frac{1}{2}$ d'erreur; et pour le second, $\frac{1}{4}$ de denier; différence au reste qui provient de ce qu'on a pris 65 f. 83 et $14477^{f.}$,08 pour facteurs, au lieu de $65^{f.}$, 83246 et $1477^{f.}$, 08134.

214. *Problème III*. Etant donné en mesures anciennes le nombre qu'on en avoit pour un certain prix, trouver ce qu'on auroit en mesures nouvelles pour le même prix, et réciproquement. Par exemple, on suppose que pour 120 liv. on avoit 4 aunes $\frac{7}{8}$ d'un certain drap; on demande combien on aura de metres pour le même prix. Il est clair que si l'aune étoit le double, ou le triple, etc. du metre, on devroit, pour le même prix, avoir en metres le double ou le triple, etc. de ce qu'on avoit d'aunes; c'est-à-dire, de 4 aunes $\frac{7}{8}$. Donc, puisque l'aune contient 1^{m},18845, il faut multiplier 4 aunes $\frac{7}{8}$ par

ce nombre. On voit donc que ce probléme rentre dans le premier, où il s'agissoit de réduire des mesures anciennes en nouvelles, *et vice versâ*. Ainsi nous nous contenterons d'opérer sur le seul exemple qui précede.

$$
\begin{array}{rl}
 & \overset{m}{1},18845 \\
 & 4\,\tfrac{7}{8} \\
\hline
 & 4,75380 \\
\text{pour } \tfrac{4}{8}\ldots\ldots & 0,59422|50 \\
\tfrac{2}{8}\ldots\ldots & 0,29711|25 \\
\tfrac{1}{8}\ldots\ldots & 0,14855\ 62 \\
\hline
 & \overset{m}{5},79369|37
\end{array}
$$

Observons seulement qu'il eût été plus court pour $\frac{7}{8}$, de prendre le huitieme de $1^m,18845$, qui est $0^m,148556$, et de le retrancher de $1^m,18845$, ce qui donneroit $1^m,039894$, qui, ajouté à $4^m,75380$ donneroit $5^m,793694$, comme ci-dessus.

Des Rapports, des Proportions, et de différentes Regles qui en dépendent.

215. Ce que nous avons dit jusqu'ici, renfermant l'application des quatre regles fondamentales de l'arithmétique aux nombres de toute espece, nous devrions naturellement nous arrêter en cet endroit, et cela avec d'autant plus de raison, que les regles subséquentes se ramenent toutes en dernier résultat, à quelqu'une des regles ci-dessus. Cependant nous croyons devoir exposer les plus simples de ces regles, 1°. pour diriger les éleves dans la marche qui doit les faire arriver au résultat définitif, dont on vient de parler; et 2°. parce

qu'elles sont susceptibles de plusieurs méthodes d'abréviations, méthodes auxquelles nous avons spécialement consacré une partie de ce cours. Et d'abord, pour traiter un des cas les plus simples, proposons-nous cette question : 6 metres ont coûté 36 francs, combien coûteront 18 metres ? Il est clair que ce second nombre de metres étant le triple du premier, il doit coûter trois fois 36 francs, ou 108 francs. Si au contraire on eût eu à résoudre cette question : 18 metres ont coûté 36 francs, combien coûteront 6 metres ? On voit que le second nombre de metres n'étant que le tiers du premier, il ne doit coûter que le tiers de 36 francs, c'est-à-dire 12 francs. S'il restoit quelque doute sur la légitimité des résultats ci-dessus, on pourroit l'éclaircir, en raisonnant de la maniere suivante, sur le premier exemple : si l'on connoissoit le prix du metre, on trouveroit celui des 18 metres, en multipliant ce prix par 18 ; or, puisque 6 metres ont coûté 36 francs, il est clair que l'on trouvera le prix du metre, en divisant 36 francs par 6, ce qui donnera 6 francs ; multipliant alors 6 francs par 18, on aura 108 francs, comme ci-dessus. Quant au second exemple, où 18 metres étoient supposés coûter 36 francs, on voit qu'en divisant 36 francs par 18, on aura 2 francs pour le prix du metre, et par conséquent 6 fois 2 francs, ou 12 francs, pour le prix de 6 metres.

216. Si l'on observe avec soin la premiere façon dont nous avons résolu les deux exemples précédens, 1°. on verra que, pour trouver les prix cherchés 108 et 12, nous avons multiplié le prix connu, 36 francs, dans l'un par 3, et dans l'autre par $\frac{1}{3}$: or 3 et $\frac{1}{3}$ ne sont autre chose que les quotiens des seconds nombres de metres 18 et 6, divisés par les premiers 6 et 18, ou que les valeurs des frac-

tions $\frac{18}{6}$ et $\frac{6}{18}$, réduites à leur plus simple expression. D'où il suit que dans tous les cas pareils, pour avoir le prix cherché, il faut multiplier le prix connu par une fraction, dont le numérateur soit le second nombre de metres, et dont le dénominateur soit le premier. Sur quoi l'on remarquera deux choses évidentes par elles-mêmes; l'une que le prix cherché ne changeroit pas, quand même il s'agiroit, au lieu de metres, de deux mêmes nombres d'aunes, de toises, etc.; c'est-à-dire, que, dans le premier exemple, 18 toises, ou aunes, ou etc. coûteroient encore 108 francs, en supposant que 6 toises, ou aunes, ou etc., eussent coûté 36 francs. L'autre que dans le second exemple, et dans tout autre pareil, au lieu de multiplier le prix connu 36 francs, par la fraction $\frac{6}{18}$, il sera plus simple de ne multiplier 36 que par $\frac{1}{3}$, qu'on trouvera, en réduisant $\frac{6}{18}$ à sa plus simple expression.

2°. On verra encore que, dans le premier exemple, 6 metres sont contenus dans 18 metres, autant de fois que le prix connu 36 francs, est contenu dans le prix cherché 108 francs, c'est-à-dire, trois fois; et que, dans le second exemple, 18 metres sont contenus dans 6 metres, comme le prix connu 36 francs, est contenu dans le prix cherché 12 francs; c'est-à-dire, $\frac{1}{3}$ de fois. Donc, puisque le résultat seroit le même, en substituant aux metres, les mêmes nombres de toises, aunes, etc., on peut conclure en général, que les longueurs des marchandises se contiennent entr'elles, comme le prix connu de la premiere contient le prix cherché de la seconde. De plus, comme d'un côté dans le premier exemple, $\frac{18}{6}$ exprime le quotient des longueurs, tandis que $\frac{108}{36}$ exprime celui des prix, et que de l'autre nous venons de voir que ces quotiens doivent être égaux, il s'ensuit donc que $\frac{18}{6}$ doit égaler $\frac{108}{36}$, ainsi que

dans le second, $\frac{6}{18}$ égale $\frac{12}{36}$; d'où l'on voit que dans tous les cas pareils, il y a égalité entre les fractions qui expriment les longueurs et les prix correspondans.

Voyons encore un exemple d'une autre espece. Soit proposé de savoir combien l'on dépenseroit d'argent en 12 jours, en supposant qu'on eût dépensé 120 francs en 4 jours. On voit que 12 jours étant le triple de 4 jours, on doit dépenser dans ces 12 jours, le triple des 120 francs qu'on a dépensé pendant les 4 jours, c'est-à-dire, 360 francs. Ce qu'on trouveroit aussi en disant : Puisqu'on a dépensé 120 francs en 4 jours, la dépense monte à 30 francs par jour; donc en 12 jours on doit dépenser 12 fois 30 francs, ou 360 francs. On voit donc qu'encore, dans ce nouveau cas, pour trouver la dépense cherchée, il faut multiplier la dépense connue par le nombre 3, qui n'est autre chose que le quotient du nombre 12 de jours correspondant à la dépense cherchée, divisé par le nombre 4 des jours relatifs à la dépense connue. Et l'on voit de plus, qu'il y a aussi égalité entre les quotiens $\frac{12}{4}$ et $\frac{360}{120}$ des jours et des dépenses correspondantes. Si au contraire, on eût demandé combien on eût dépensé d'argent en 4 jours, en supposant que la dépense se fût montée à 120 francs en 12 jours, en raisonnant comme cidessus, on auroit trouvé pour la dépense cherchée, 40 francs, en multipliant la dépense connue 120 francs par la fraction $\frac{1}{3}$, qui n'est autre chose que la fraction $\frac{4}{12}$, réduite à ses moindres termes; fraction qui n'est elle-même que le quotient du nombre de jours correspondans à la dépense cherchée, divisé par le nombre de jours relatifs à la dépense connue. L'on voit aussi qu'il y a ici égalité entre les fractions $\frac{4}{12}$ et $\frac{40}{120}$ formées des jours et des dépenses correspondantes.

217. Enfin si l'on proposoit cette question : 7 ouvriers ont fait un certain ouvrage en 12 jours ; en combien de jours 28 ouvriers feroient-ils le même ouvrage ? Je dis ; le second nombre d'ouvriers 28, étant quadruple du premier 7, les 28 ouvriers ne doivent employer, pour faire le même ouvrage, que le quart des 12 jours qu'y ont mis les 7 ouvriers, c'est-à-dire, 3 jours. Ce qu'on trouveroit encore en disant : 7 ouvriers travaillant à un ouvrage pendant 12 jours, en font ce qu'en feroient 7 fois 12 ouvriers ou 84 ouvriers en un jour ; donc chaque ouvrier fait $\frac{1}{84}$ de l'ouvrage par jour ; donc 28 ouvriers en feront $\frac{28}{84}$ ou $\frac{1}{3}$ dans un jour ; donc il leur faudra 3 jours pour faire l'ouvrage entier. D'après la premiere solution, l'on voit que pour trouver le nombre de jours cherché, nous n'avons pas, comme dans les exemples précédens, multiplié le nombre de jours connu par la fraction directe $\frac{28}{7}$, mais par la fraction inverse $\frac{7}{28}$ ou $\frac{1}{4}$. On peut voir encore qu'il n'y a plus égalité entre les deux fractions $\frac{28}{7}$ et $\frac{3}{12}$, qui expriment les ouvriers et les jours correspondans ; mais qu'on obtiendra cette égalité, en écrivant l'inverse de $\frac{28}{7}$, c'est-à-dire, $\frac{7}{28}$. Cette différence provient de ce qu'en comparant les ouvriers aux jours, la nature de la question fait voir que, plus il y a d'ouvriers, moins il faut de jours pour faire le même ouvrage ; tandis que, dans le premier exemple, plus il y avoit de metres, plus les prix étoient grands ; et que, dans le second, plus il y avoit de jours, plus la dépense étoit grande.

218. La regle ci-dessus comprend donc deux cas, selon que l'on multiplie le terme de même espece que le terme cherché, par la fraction *directe*, ou par cette fraction, mais *inverse* ; et c'est ce qui a fait aussi distinguer, selon l'occurrence de ces cas, en *regle de trois directe*, ou *regle de trois in-*

verse, cette regle, appellée d'ailleurs en général *regle de trois*, parce qu'elle sert à faire trouver un terme inconnu, par le moyen de *trois* termes connus.

On voit qu'avec le secours seul du raisonnement et des fractions, nous sommes parvenus à résoudre généralement la regle de trois, soit directe, soit inverse. Il en seroit de même de toutes les autres regles, dont il nous reste encore à parler. Mais comme la théorie suivante sert très-souvent à abréger et le discours, et les opérations, nous allons l'exposer, en ayant soin de renvoyer à l'Algebre, ce qui est plus particulièrement de son ressort.

219. Lorsqu'on veut comparer ensemble deux quantités quelconques, 4 et 12, par exemple, il se présente deux manieres : l'une par laquelle on cherche de combien la plus grande surpasse la plus petite, et l'autre qui a pour but de connoître combien l'une, la seconde, par exemple, contient la premiere ; dans le premier cas, le nombre 8, qui n'est autre chose que la différence entre 12 et 4, s'appelle le *rapport arithmétique* de 4 à 12, et dans le second, le nombre 3 qui n'est que le quotient de 12, divisé par 4, s'appelle le *rapport géométrique* de 4 à 12. On les appelle tous deux *rapport*, parce qu'en effet, dans les deux cas, ils expriment le double rapport qui peut exister entre 4 et 12. Quant aux mots *arithmétique* et *géométrique*, qu'on leur ajoute, pour les distinguer, ils offrent une dénomination assez vicieuse, puisque tous deux se trouvant également par une des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique, savoir, le premier par une soustraction, et le second par une division ; l'un n'est ni plus ni moins arithmétique que l'autre ; à moins qu'on ne dise, pour excuser cette dénomination, qu'on a ajouté au second rapport le mot géométrique,

parce que c'est le seul qui, à l'exception de quelques cas fort rares, soit d'usage en Géométrie. Le premier terme 4 de chacun de ces rapports, s'appelle aussi *antécédent*, et le second terme 12 s'appelle *conséquent*. Le rapport arithmétique se marque ainsi 4.12, tandis que pour le rapport géométrique, on sépare les deux termes par deux points, en écrivant 4 : 12; mais, dans ces deux sortes de rapports, on prononce également 4 est à 12.

220. Lorsque quatre nombres sont tels, que le rapport des deux premiers est égal au rapport des deux derniers, alors on dit que ces nombres sont en *proportion*, et la proportion s'appelle arithmétique ou géométrique, selon que les rapports qu'on considere sont arithmétiques ou géométriques. Ainsi 4. 12 et 8.16 sont en proportion arithmétique, parce que le rapport arithmétique 8 de 4 à 12, est égal au rapport arithmétique de 8 à 16, qui est également 8. 4 : 12 et 8 : 24 sont en proportion géométrique, parce que le rapport géométrique $\frac{12}{4}$, ou 3 de 4 à 12, est égal au rapport géométrique $\frac{24}{8}$, ou 3 de 8 à 24. On peut donc dire qu'en général une proportion est l'égalité de deux rapports. Pour indiquer la proportion, on sépare les deux rapports par deux points, si elle est arithmétique, et par quatre, si elle est géométrique. Ainsi, pour indiquer que les deux rapports égaux 4 . 12 et 8. 16 forment une proportion arithmétique, on écrit 4 . 12 : 8. 16; et pour indiquer que les deux rapports égaux 4 : 12 et 8 : 24 forment une proportion géométrique, on écrit 4 : 12 : : 8 : 24. On prononce la premiere 4 est à 12 arithmétiquement, comme 8 est à 16, et la seconde simplement; 4 est à 12 comme 8 est à 24. Dans l'une et l'autre proportion, le premier et le troisieme terme s'appellent du nom commun d'*antécédens*, et le second et le quatrieme du nom com-

mun de *conséquens* ; mais quand on veut les distinguer les uns des autres, on les appelle premier ou second antécédent, et premier ou second conséquent, selon que le terme que l'on considere est l'antécédent ou le conséquent du premier ou du second rapport. Pour distinguer encore les deux termes du milieu des deux autres termes, on appelle ceux-là les *moyens*, et ceux-ci les *extrêmes*, dénominations fort exactes; ce qu'on ne peut pas dire des noms de proportion arithmétique, et de proportion géométrique, qu'on a donné à l'assemblage de deux rapports arithmétiques ou géométriques ; noms qu'on peut accuser du même vice que ces derniers, et qu'on peut excuser par la même raison que nous avons donnée (219). C'est pour éviter ces locutions impropres, qu'on a donné nouvellement à la proportion arithmétique le nom *d'équi-différence*, dénomination fort juste, puisqu'elle n'est en effet qu'une égalité de deux différences. Quant à la proportion géométrique, on s'est contenté de l'appeler simplement proportion. Nous croyons cependant que pour obéir à l'analogie, et pour éviter toute espece de confusion, on devroit nommer une proportion géométrique un *équi-quotient*, dénomination d'ailleurs fort exacte, puisqu'elle n'est que l'égalité de deux quotiens. Quoiqu'il en soit, nous nous conformerons à l'usage, en l'appellant simplement proportion, d'autant plus volontiers que nous ne craindrons pas qu'on la confonde avec la proportion arithmétique, dont nous ne parlerons plus, parce qu'elle ne peut nous être d'aucun usage pour la suite de cet ouvrage. On sent alors que, quand nous nous servirons du mot rapport, nous n'entendrons parler que du rapport géométrique. Voyons d'abord ces rapports et les transformations qu'on peut leur faire subir.

221. Puisqu'un rapport est le quotient du conséquent par l'antécédent, on peut toujours le regarder comme un nombre fractionnaire ou une fraction, dont le conséquent du rapport est le numérateur, et dont l'antécédent est le dénominateur, et par conséquent on pourra faire subir aux deux termes du rapport, sans altérer sa valeur, les mêmes opérations qui, comme nous l'avons vu depuis 145 jusqu'à 162, n'alterent pas la valeur d'une fraction ; ce qui va nous servir à simplifier plusieurs rapports. Par exemple, soit proposé le rapport 12 : 4 ou $\frac{4}{12}$; divisant les deux termes par 4, j'ai $\frac{1}{3}$ ou le rapport 3 : 1, que je pourrai substituer à celui de 12 : 4, et qui est plus simple que lui. Si j'avois le rapport 4 : 12 ou $\frac{12}{4}$, en divisant les deux termes par 4, j'aurois $\frac{3}{1}$ ou le rapport 1 : 3, plus simple que celui de 4 : 12, et que je puis lui substituer. Nous allons passer maintenant à des rapports plus composés; mais pour élaguer les explications superflues, nous avertissons, 1°. que nous regarderons par-tout le rapport comme une fraction qui a pour numérateur le conséquent, et pour dénominateur l'antécédent de ce rapport; 2°. que le Lecteur doit avoir présentes à l'esprit les différentes regles ou abréviations que nous avons données, non-seulement dans les art. cités ci-dessus, mais encore dans ceux qui contiennent la division des fractions. Cela posé, soit d'abord le rapport $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; je réduis les deux termes au même dénominateur, et j'ai $\frac{8}{12} : \frac{9}{12}$; alors supprimant le dénominateur commun 12, j'ai le rapport 8 : 9, plus simple que celui de $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$. Soit le rapport $\frac{3}{4} : \frac{7}{12}$; je le change d'abord en $\frac{9}{12} : \frac{7}{12}$, et ensuite en 9 : 7. Soit le rapport $2\frac{3}{5} : 5\frac{3}{8}$; je le change d'abord en $\frac{13}{5} : \frac{43}{8}$; ensuite en $\frac{104}{40} : \frac{215}{40}$, et enfin en 104 : 215. Soit encore le rapport $2\frac{4}{7} : 5\frac{2}{5}$; je lui substituerois d'abord celui de $\frac{18}{7} : \frac{27}{5}$, ensuite celui de $\frac{2}{7} : \frac{3}{5}$, en divisant les deux numérateurs par 9 ; puis celui $\frac{10}{35} : \frac{21}{35}$, enfin

le rapport 10 : 21. Soit enfin proposé le rapport $3\frac{5}{9} : 4\frac{20}{27}$; je le changerois successivement en $\frac{32}{9} : \frac{128}{27}$, en $\frac{1}{9} : \frac{4}{27}$ en divisant les deux numérateurs par 32, en $\frac{1}{1} : \frac{4}{3}$, en divisant les deux dénominateurs par 9, et enfin en $\frac{3}{3} : \frac{4}{3}$ ou 3 : 4. Passons aux proportions.

222. Puisqu'une proportion n'est que l'égalité de deux fractions, on pourra, sans troubler cette égalité, les réduire au même dénominateur, et ensuite le supprimer. Il faudra donc que les deux produits qui forment alors les deux nouveaux numérateurs soient égaux ; or ces produits ne sont autre chose que ceux des extrêmes et des moyens ; donc, dans toute proportion le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Ainsi dans la proportion (220) 4 : 12 : : 8 : 24, le produit des extrêmes 4 et 24 est égal au produit des moyens 12 et 8. On a vu ci-dessus qu'au rapport $3\frac{5}{9} : 4\frac{20}{27}$, on pouvoit substituer le rapport 3 : 4 ; donc, ces quatre termes sont en proportion ; donc, le produit des extrêmes $3\frac{5}{9}$ et 4 dans la proportion $3\frac{5}{9} . 4\frac{20}{27} : : 3 : 4$ doit être égal au produit des moyens $4\frac{20}{27}$ et 3 ; et en effet, les deux produits font $14\frac{2}{9}$ et $14\frac{6}{27}$ ou $14\frac{2}{9}$.

223. On verra avec la même facilité que, si quatre termes n'étoient pas en proportion, le produit des extrêmes ne sauroit être égal à celui des moyens ; car par la supposition, les deux fractions qui formeroient les deux rapports de la proportion, seroient inégales ; donc elles le seroient encore, après qu'on les auroit réduites au même dénominateur et qu'on l'auroit supprimé. Donc il y auroit inégalité entre les produits qui formeroient les nouveaux numérateurs, produits qui ne sont autre chose que ceux des extrêmes et des moyens.

224. La propriété des proportions énoncée (222) est d'un usage aussi continuel qu'important dans toutes les parties des Mathématiques. Voyons d'abord

bord les conséquences qui en découlent naturellement.

La premiere, comme la plus utile des propriétés qui résultent du principe précédent, consiste à faire trouver un terme quelconque d'une proportion, quand on en connoît les trois autres. En effet si, par exemple, on cherche un extrême, il est clair que, si l'on connoissoit le produit des extrêmes, en divisant ce produit par l'extrême connu, on auroit (89) pour quotient l'extrême cherché. On le trouvera donc aussi, en divisant par l'extrême connu, le produit des moyens, puisqu'il est égal à celui des extrêmes. Un raisonnement tout à fait semblable feroit voir que, si c'étoit l'un des moyens qui fût inconnu, on le trouveroit, en divisant le produit des extrêmes par le moyen connu. Donc en général, pour trouver un terme inconnu d'une proportion, il faut, selon que ce terme est un extrême ou un moyen, diviser le produit des moyens ou des extrêmes, par l'extrême ou le moyen connu. Dorénavant, pour représenter le terme inconnu qu'on cherche, nous nous servirons de la lettre x.

Soit donc proposé de trouver le quatrieme terme x de cette proportion $4:32::25:x$; je multiplie les moyens 32 et 25 l'un par l'autre, ce qui donne 800; divisant ensuite ce produit par l'extrême connu 4, j'aurai 200 pour l'extrême cherché, de sorte que la proportion donnée $4:32::25:x$, deviendroit $4:32::25:200$, proportion dont on peut vérifier la justesse de deux manieres, soit en faisant le produit des extrêmes et des moyens, car ils donnent 4 fois 200 et 32 fois 25, c'est-à-dire, également 800; soit en comparant les deux rapports $\frac{32}{4}$ et $\frac{200}{25}$, qui se réduisent de part et d'autre au même rapport $\frac{8}{1}$ ou à celui de $1:8$. Observez qu'on eût trouvé ce

quatrieme terme 200 d'une maniere plus expéditive, si on eût d'abord réduit le premier rapport $4:32$ à celui de $1:8$; car alors il eût suffi de multiplier 25 par 8.

Soit proposé de trouver le troisieme terme de cette proportion $2\frac{3}{4}:6\frac{7}{8}::x:50$. Comme c'est ici un des moyens qu'on cherche, je multiplie l'un par l'autre les deux extrêmes $2\frac{3}{4}$ ou $\frac{11}{4}$ et 50, et j'ai pour produit $\frac{550}{4}$, que je divise par le moyen connu $6\frac{7}{8}$ ou $\frac{55}{8}$, ou plutôt je divise d'abord les deux numérateurs par 55, et les deux dénominateurs par 4, et il ne me reste plus alors qu'à diviser simplement $\frac{10}{1}$ par $\frac{1}{2}$, ce qui donne 20 ; ensorte que la proportion donnée $2\frac{3}{4}:6\frac{7}{8}::x:50$, devient $2\frac{3}{4}:6\frac{7}{8}::20:50$. Et en effet, le produit des extrêmes 50 et $2\frac{3}{4}$ ou $\frac{11}{4}$ fait $\frac{550}{4}$ ou $\frac{275}{2}$, et celui des moyens $6\frac{7}{8}$ ou $\frac{55}{8}$ et 20, fait aussi $\frac{275}{2}$: ou autrement encore, le rapport $\frac{50}{20}$ vaut $\frac{5}{2}$, et celui-ci $\frac{11}{4}:\frac{55}{8}$, est aussi $\frac{5}{2}$. On eût trouvé plus briévement le terme cherché 20, si on eût changé successivement le premier rapport $2\frac{3}{4}:6\frac{7}{8}$ ou $\frac{11}{4}:\frac{55}{8}$, en $\frac{1}{4}:\frac{5}{8}$, puis en $\frac{2}{8}:\frac{5}{8}$, enfin en $2:5$; car alors on n'eût plus eu qu'à trouver le troisieme terme de cette proportion $2:5::x:50$, où l'on trouve x tout de suite, en divisant par 5 le produit des extrêmes 2 et 50.

225. La seconde conséquence qu'on peut tirer de l'égalité des produits des extrêmes et des moyens, est qu'on pourra faire subir à une proportion tous les changemens qui ne troubleront pas cette égalité ; et l'on verra bientôt que ces changemens sont au nombre de 8, si l'on observe qu'on peut, sans détruire l'égalité, 1°. mettre pour premier terme de la proportion chaque extrême et chaque moyen, pourvu qu'on place pour quatrieme terme l'autre extrême ou l'autre moyen, ce qui fera d'abord 4 combinaisons ; 2°. dans chacune de ces dernieres,

changer les moyens de place. Ainsi dans la proportion $3:12::7:28$, je puis, sans détruire l'égalité des produits des extrêmes et des moyens, trouver les 8 combinaisons suivantes, en écrivant tour-à-tour chaque terme le premier, et en changeant ensuite, dans chacune, les moyens de place.

	$3:12::7:28$		$3:7::12:28$
1°.	$12:3::28:7$	2°.	$12:28::3:7$
	$7:28::3:12$		$7:3::28:12$
	$28:7::12:3$		$28:12::7:3$

226. Ce que nous venons de dire peut servir à deux usages principaux. Le premier, qui a souvent son utilité, consiste à faire ensorte que le terme inconnu x, soit toujours le dernier de la proportion. Pour cela, il suffit, selon que x est un extrême ou un moyen, de faire de l'autre extrême ou de l'autre moyen, le premier terme de la proportion. L'inspection seule des exemples suivans suffira. Soient donc données les trois proportions suivantes, où x est successivement au 3e, au 2e et au 1er terme.

$$3:12::x:28$$
$$3:x::7:28$$
$$x:12::7:28$$

pour avoir x au dernier terme, je les écris comme il suit :

$$12:3::28:x$$
$$7:28::3:x$$
$$28:7::12:x$$

227. Une conséquence encore plus utile, qu'on peut tirer des changemens ci-dessus, c'est que dans toute proportion, on peut multiplier ou diviser les deux antécédens et les deux conséquens par un même nombre. En effet, si l'on change les moyens de

place, les deux antécédens deviendront le premier rapport de la proportion, et les deux conséquens le second; et nous avons vu (221) qu'on pouvoit multiplier ou diviser les deux termes d'un rapport par un même nombre. Cette propriété va nous servir dans les exemples suivans, à simplifier la recherche du terme inconnu x.

Soit proposée cette proportion : $3 : 7 :: 15 : x$. Je divise les deux antécédens 3 et 15 par 3, et la proportion devient $1 : 7 :: 5 : x$, qu'on voit tout de suite être égal à 35. Soit encore donné $\frac{2}{3} : 12 :: \frac{3}{4} : x$; je réduis les antécédens $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ au même dénominateur, et j'ai $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; les multipliant alors tous deux par 12, ce qui revient à supprimer le dénominateur 12, j'ai 8 et 9. La proportion devient donc $8 : 12 :: 9 : x$, ou, en divisant les deux termes du premier rapport par 4, $2 : 3 :: 9 : x$, qu'on trouvera valoir $\frac{27}{2}$ ou $13\frac{1}{2}$. Qu'on ait enfin $4\frac{1}{3} : x :: 9\frac{3}{4} : \frac{7}{12}$; j'écris d'abord ainsi cette proportion (226) $9\frac{3}{4} : \frac{7}{12} :: 4\frac{1}{3} : x$; ensuite $\frac{39}{4} : \frac{7}{12} :: \frac{13}{3} : x$; alors divisant par 13 les numérateurs des antécédens $\frac{39}{4}$ et $\frac{13}{3}$, j'ai $\frac{3}{4} : \frac{7}{12} :: \frac{1}{3} : x$; puis multipliant les deux termes de $\frac{3}{4}$ par 3, j'ai $\frac{9}{12} : \frac{7}{12} :: \frac{1}{3} : x$; supprimant alors le dénominateur 12 commun aux deux termes du premier rapport, j'ai $9 : 7 :: \frac{1}{3} : x$, qui vaut donc $\frac{7}{27}$; et en effet, le produit des extrêmes $\frac{7}{27}$ et $9\frac{3}{4}$ ou $\frac{39}{4}$, est $\frac{273}{108}$ ou $\frac{91}{36}$, et celui des moyens $\frac{7}{12}$ et $4\frac{1}{3}$ ou $\frac{13}{3}$, est également $\frac{91}{36}$.

S'il se trouvoit des décimales dans les termes de la proportion, on se conduiroit comme on va le voir. Soit d'abord donné $3{,}75 : 2{,}25 :: 67 : x$; on supprimera la virgule dans les deux termes du premier rapport, ce qui n'en altérera pas la valeur, puisqu'on ne fait par-là que multiplier chacun de ses termes par 100; on aura donc $375 : 225 :: 67 : x$; ensuite $15 : 9 :: 67 : x$ en divisant 375 et 225 par 25; enfin $5 : 3 :: 67 : x$ qui vaut donc $\frac{3 \text{ fois } 67}{5}$, ou $\frac{201}{5}$, ou $40\frac{1}{5}$,

ou 40,2. Si j'avois $2,16 : 24 :: 57,6 : x$, j'écrirois.... $216 : 24 :: 5760 : x$ en multipliant les deux antécédens par 100 : puis $9 : 1 :: 5760 : x$ en divisant par 24 les deux termes du premier rapport; enfin $1 : 1 :: 640 . x$; en divisant les deux antécédens par 9. On voit clairement ici que x vaut 640. Mais si j'avois........ $13 : 16,7 :: 3,48 : x$, j'écrirois $130 : 167 :: 3,48 : x$, alors multipliant 3,48 par 167, et divisant ensuite par 130, je trouverois que x vaut $447 \frac{6}{130}$ ou 447,0461......

228. Appliquons maintenant ce que nous venons de dire sur les proportions, aux regles de trois, tant directes qu'inverses. Nous avons vu (218) 1°. que l'on distinguoit si cette regle étoit directe ou inverse, selon que, après avoir comparé en général les quantités de différente espèce qui entroient dans l'énoncé de la question, on trouvoit que le plus produisoit, ou le plus, ou le moins; 2°. que, dans le premier cas, le rapport entre la quantité cherchée et la quantité donnée de même espece, étoit égal au rapport entre les deux autres quantités de même espece entr'elles, et relatives à la quantité cherchée, et à la quantité donnée. 3°. Enfin que dans le cas de la regle inverse, le dernier rapport étoit l'inverse du précédent. Il sera donc bien aisé, d'après cela, d'établir toujours la proportion convenable entre les quatre termes qui composeront toute regle de trois, directe ou inverse, et par conséquent de trouver le terme inconnu. Voyons des exemples.

229. 64 hectogrammes d'une certaine marchandise ont coûté 136 francs; combien coûteront 220 hectogrammes? Comparant d'abord les hectogrammes aux francs, je vois qu'en général plus il y a d'hectogrammes, plus il en coûtera de francs; le plus produit donc le plus; la regle est donc directe; donc le rapport $\frac{x}{136}$ des francs connus, aux francs cherchés,

est égal au rapport $\frac{220}{64}$ des hectogrammes relatifs aux francs connus et cherchés. J'ai donc la proportion $64 : 220 :: 136 : x$, ou $8 : 220 :: 17 : x$, ou enfin, $2 : 55 :: 17 : x$, qui vaut donc $\frac{55 \text{ fois } 17}{2}$, ou $467^{f.} \frac{1}{2}$.

Soit proposée cette autre question : un homme a fait 84 metres d'ouvrage en 8 jours, combien mettra-t-il de jours à faire 91 metres? Comparant les jours aux metres, je vois qu'en général plus cet ouvrier travaillera de jours, et plus il fera de metres. Le plus produit donc le plus ; la regle est donc directe ; donc le rapport des jours donnés et cherchés où $\frac{x}{8}$ est égal au rapport $\frac{84}{91}$ des metres relatifs aux jours donnés et cherchés ; d'où je tire la proportion $91 : 84 :: 8 : x$, ou $13 : 12 :: 8 : x$; donc x vaut $\frac{96}{13}$, ou $7\frac{5}{13}$ de jours.

Si l'on me disoit : un homme marchant 6 heures par jour, a fait une certaine route en 12 jours ; combien auroit-il mis de jours à faire la même route, en marchant 9 heures par jour? Comparant ici généralement les heures aux jours, je vois que plus il marchera d'heures par jour, moins il emploiera de jours à faire la même route ; le plus ici produit donc le moins ; donc la regle est inverse ; donc le rapport $\frac{x}{12}$ des jours connus et cherchés, doit être égal au rapport inverse $\frac{6}{9}$ des heures relatives aux jours connus et cherchés ; donc il doit y avoir égalité entre les rapports $\frac{6}{9}$ et $\frac{x}{12}$, ce qui donne la proposition $9 : 6 :: 12 : x$, ou $3 : 2 :: 12 : x$, ou enfin $1 : 2 :: 4 : x$, qui vaut donc 8 jours.

230. Soit à présent proposée cette autre question : à 5 pour 100 d'intérêt par an, (qu'on écrit ainsi, 5 p$^{r.}$ $\frac{0}{0}$), c'est-à-dire, en supposant qu'au bout de l'année, 100 francs rapportent 105 francs, on demande combien après cette année, doivent rapporter d'intérêt 840 francs. Cette regle, qu'on appelle *regle d'intérêt*

simple, se résoud aisément par les mêmes moyens que ci-dessus. En effet, on voit que plus le *capital* sera grand, plus l'intérêt le sera; donc le rapport $\frac{x}{5}$ de l'intérêt connu et cherché égale le rapport $\frac{840}{100}$ des capitaux relatifs à ces intérêts : j'ai donc.......... $100 : 840 :: 5 : x$, ou $5 : 42 :: 5 : x$; ou enfin. . . . . . $1 : 42 :: 1 : x$, qui vaut évidemment 42 francs. Si on ajoute à présent cet intérêt 42 francs, avec le capital 840, on aura 882 francs pour la somme à toucher au bout de l'année; on auroit pu aussi trouver cette somme d'un seul coup par la proportion.......... $100 : 105 :: 840 : x$, ou $20 : 21 :: 840 : x$, ou enfin $1 : 21 :: 42 : x$, qui vaut 21 fois 42 francs, ou 882 francs, comme ci-dessus.

231. Finissons par cette question : un homme qui a une lettre de change de 1800 francs à tirer sur un banquier, dans un an, ayant besoin d'argent, le prie de la lui *escompter* sur le champ, en s'offrant à payer l'intérêt, qui monte à 6 p^r. $\frac{0}{0}$ par an; combien le banquier doit-il payer? Cette regle, qu'on appelle *régle d'escompte simple*, se résoud encore comme ci-dessus; en effet plus les capitaux sont grands, plus l'escompte l'est aussi; donc le rapport des escomptes $\frac{x}{6}$ est égal à celui des capitaux correspondans $\frac{1800}{100}$, on a donc $100 : 1800 :: 6 : x$, ou $1 : 18 :: 6 : x$, qui vaudra donc 108 francs, que le banquier doit prélever sur les 1800; il n'aura donc que 1692 francs à payer. On eût pu trouver cette somme d'un coup, en faisant la proportion suivante $100 : 94 :: 1800 : x$, fondée sur ce raisonnement, si 100 francs se réduisent à 94 francs, à combien se réduiront 1800; au lieu de la proportion ci-dessus, on peut écrire $1 : 94 :: 18 : x$, qui vaudra donc 18 fois 94 francs, ou 1692 francs, comme ci-dessus. Appliquons à présent les proportions aux *regles de trois composées*, ainsi

nommées, parce qu'elles sont en effet composées du produit de plusieurs rapports simples. On va voir bientôt que les regles de trois les plus composées se réduisent à la fin à une regle de trois simple.

Exemple I.

Un homme, marchant 10 heures par jour, a fait en 18 jours, 95 myriametres ; on demande combien il en feroit pendant 27 jours, en marchant 9 heures par jour ? On voit ici que le nombre de myriametres faits et à faire, dépend et du nombre des jours que marche le voyageur, et du nombre d'heures qu'il marche chaque jour. Mais il est aisé de ramener cette regle composée à une simple, en raisonnant comme il suit : puisque, dans le premier cas, il a marché pendant 18 jours et pendant 10 heures par jour, il a donc marché en tout pendant 18 fois 10 heures ; et dans le second cas, puisqu'il doit marcher pendant 27 jours, et pendant 9 heures par jour ; il marchera pendant 27 fois 9 heures. Alors le probléme sera ramené à celui-ci : un voyageur a fait 95 myriametres en 18 fois 10 heures ; combien en fera-t-il en 27 fois 9 heures ? Or, on voit qu'en général, plus il marchera d'heures, plus il fera de myriametres ; donc la regle de trois dont il s'agit est simple et directe ; on en tirera donc cette proportion. . . . .
18 fois 10 : 27 fois 9 :: 95 : x, ou divisant dans le premier rapport 18 et 9 par 9, 2 fois 10 : 27 fois 1 :: 95 : x, ou encore en divisant les deux antécédens par 5, 2 fois 2 : 27 fois 1 :: 19 : x, enfin 4 : 27 :: 19 : x, qui vaut donc $\frac{27 \textit{ fois } 19}{4}$, ou $128\frac{1}{4}$, ou 128^myriam.^, 25. Si l'on observe maintenant que le rapport. . . . .
18 fois 10 : 27 fois 9, ou $\frac{27 \textit{ fois } 9}{18 \textit{ fois } 10}$ n'est autre chose que le produit des deux rapports simples $\frac{27}{18}$ et $\frac{9}{10}$, on verra qu'on parviendra à obtenir le rapport

composé 18 fois 10 : 27 fois 9, en écrivant l'un sous l'autre les deux rapports simples 18 : 27 et 10 : 9 en cette maniere, $\begin{matrix}18 : 27\\ 10 : \ 9\end{matrix}$, et en multipliant entr'eux les termes qui sont l'un sous l'autre ; donc la proportion ci-dessus 18 fois 10 : 27 fois 9 :: 95 : x pourra s'écrire ainsi $\begin{matrix}18 : 27\\ 10 : \ 9\end{matrix}$ :: 95 : x, et alors on fera les réductions ; c'est-à-dire, qu'on pourra diviser 18 facteur du premier terme, et 9 facteur du second par 9, et ensuite 10 facteur du premier antécédent, et le second antécédent 95 par 5 ; ce qui réduira la proportion composée à $\begin{matrix}2 : 27\\ 2 : \ 1\end{matrix}$ :: 19 : x, comme ci-dessus.

En observant avec attention la proportion..... $\begin{matrix}18 : 27\\ 10 : \ 9\end{matrix}$ :: 95 : x, on voit que, pour y arriver, il faut d'abord écrire pour dernier rapport les myriametres connus et cherchés ; qu'ensuite on obtiendra chacun des rapports qui doivent composer le premier, en comparant successivement, comme on l'a fait aux regles de trois simples, les jours, et ensuite les heures avec les myriametres. Car on verra qu'en général plus le voyageur marchera d'abord de jours, et ensuite d'heures par jour, plus il fera de myriametres ; la regle est donc dans les deux cas directe ; donc il faudra écrire 18 : 27, et 10 : 9, et ensuite comme les myriametres dépendent et des jours et des heures, on posera ces rapports l'un sous l'autre, et on les multipliera par ordre, (sauf à faire les réductions qui pourront avoir lieu) et on trouvera enfin. . . . 18 fois 10 : 27 fois 9 :: 95 : x, que le simple secours du raisonnement nous avoit fait trouver.

EXEMPLE II.

Un homme, marchant 10 heures par jour, a fait en 18 jours 95 myriametres. On demande combien il lui faudra de jours, en marchant 9 heures par jour, pour

Digitized by Google

en faire $128\frac{1}{4}$? Je dis : puisque, dans le premier cas, il a fait 95 myriametres en marchant 10 heures par jour, s'il n'eut marché que 1 heure par jour, il n'en eût fait que $\frac{95}{10}$ en 18 jours, et dans le second cas, si au lieu de marcher 9 heures, il n'eût marché que une heure, il en eût fait en x jours $\frac{128\frac{1}{4}}{9}$: la question est donc ramenée à celle-ci, où l'on fait abstraction du temps qu'il marche par jour.

Un voyageur a fait $\frac{95}{10}$ de myriametres en 18 jours, combien lui faudra-t-il de jours pour faire $\frac{128\frac{1}{4}}{9}$ de myriametres? Or, plus il y a de myriametres à faire, plus il faut de jours; j'ai donc la proportion..... $\frac{95}{10} : \frac{128\frac{1}{4}}{9} :: 18 : x$, ou réduisant les deux termes du premier rapport, au même dénominateur, et le supprimant ensuite, 9 fois $95 : 10$ fois $128\frac{1}{4} :: 18 : x$; si après avoir écrit pour dernier rapport les jours connus et cherchés, c'est-à-dire, si après avoir écrit le rapport $18 : x$, je compare successivement les heures et les myriametres aux jours; je trouverai 1°. que plus il y a d'heures de marche par jour, moins il faut de jours; 2°. que plus il y a de myriametres à faire, plus il faut de jours; l'un des rapports, c'est-à-dire, celui des jours est donc inverse, puisque le plus produit le moins, tandis que celui des myriametres est direct, puisque le plus produit le plus : si j'écris à présent ces rapports l'un sous l'autre, et que j'arrange ainsi ma proportion $\begin{matrix} 9 : & 10 \\ 95 : & 128\frac{1}{4} \end{matrix} :: 18 : x$; et qu'en cet état je multiplie par ordre, j'aurai. . . . . 9 fois $95 : 10$ fois $128\frac{1}{4} :: 18 : x$, proportion absolument la même que celle que le raisonnement nous avoit donnée. Si l'on divise le facteur 9 du premier antécédent 9 fois 95, et le second antécédent 18 par 9; on aura $95 : 10$ fois $128\frac{1}{4} :: 2 : x$, puis en divisant les deux premiers termes par 5, $19 : 2$ fois $128\frac{1}{4} :: 2 : x$,

ou $19 : 256\frac{1}{2} :: 2 : x$, donc x vaut $\frac{513}{19}$, ou 27 jours, comme on devoit le trouver en effet, puisque cette regle n'est autre chose que la preuve du premier exemple.

EXEMPLE III.

Soit proposée cette troisieme question : 36 ouvriers, en travaillant 8 heures par jour, ont creusé en 16 jours, un fossé de 72 metres de longueur sur 18 de largeur et 12 de profondeur; on demande combien il faudroit de jours à 32 ouvriers, qui travailleroient 12 heures par jour, pour creuser un fossé de 64 metres de longueur, sur 27 de largeur et 18 de profondeur ?

Cette regle renferme 11 termes, outre le terme inconnu que l'on cherche; voyons comment nous parviendrons à la réduire à trois; pour cela, nous avertissons d'abord qu'en Géométrie, on évalue en metres-cubes les fossés ci-dessus, en multipliant la longueur par la largeur, et ensuite par la profondeur; d'où il suit que le premier fossé contient 72 fois 18 fois 12 metres-cubes, et que le second en contient 64 fois 27 fois 18. Cela posé, 36 ouvriers, en travaillant 8 heures par jour, font le même ouvrage que 8 fois 36 ouvriers qui travailleroient pendant une heure, et 32 ouvriers, en travaillant 12 heures par jour, font ce que feroient 12 fois 32 ouvriers en une heure. Le probléme est donc d'abord ramené à celui-ci, qui est beaucoup plus simple. 8 fois 36 ouvriers ont fait, en 16 jours, 72 fois 18 fois 12 metres-cubes; en combien de jours 12 fois 32 ouvriers en feront-ils 64 fois 27 fois 18 ? Or, l'on voit que dans les deux membres de cette question, on aura l'ouvrage d'un seul ouvrier, en divisant l'ouvrage fait par tous, par leur nombre; c'est-à-dire, que l'ouvrage d'un seul ouvrier est exprimée dans le

premier membre par $\frac{72 \text{ fois } 18 \text{ fois } 12}{8 \text{ fois } 36}$, et dans le second, par $\frac{64 \text{ fois } 27 \text{ fois } 18}{12 \text{ fois } 32}$. La question est donc enfin ramenée à cette regle de trois simple. On a fait en 16 jours $\frac{72 \text{ fois } 18 \text{ fois } 12}{8 \text{ fois } 36}$ metres-cubes, en combien de jours en fera-t-on $\frac{64 \text{ fois } 27 \text{ fois } 18}{12 \text{ fois } 32}$. Comme plus l'ouvrage est grand, plus il faut de jours, on voit qu'il s'agit de trouver le quatrieme terme de la proportion...... $\frac{72 \text{ fois } 18 \text{ fois } 12}{8 \text{ fois } 36} : \frac{64 \text{ fois } 27 \text{ fois } 18}{12 \text{ fois } 32} :: 16^{j.} : x$; il faut donc multiplier les jours connus par le second terme, et les diviser ensuite par le premier, ce qui revient à les multiplier par $\frac{8 \text{ fois } 36 \text{ fois } 64 \text{ fois } 27 \text{ fois } 18}{12 \text{ fois } 32 \text{ fois } 72 \text{ fois } 18 \text{ fois } 12}$; ou par le produit successif des fractions $\frac{8}{12}$, $\frac{36}{32}$, $\frac{64}{72}$, $\frac{27}{18}$, et $\frac{18}{12}$, ou des rapports 12 : 8, 32 : 36, 72 : 64, 18 : 27 et 12 : 18, qu'on multiplieroit successivement, antécédent par antécédent, et conséquent par conséquent. Or, il est aisé de voir que le premier et le second de ces rapports ne sont que les rapports inverses des jours et des ouvriers, et que les trois derniers sont les rapports directs des longueurs, largeurs et profondeurs des fossés, ce qui provient de ce que plus il y a d'ouvriers, et plus ils travaillent d'heures par jour, moins, dans les deux cas, il faut de jours, et ensuite de ce que plus les fossés sont longs, larges et profonds, et plus il faut de jours. On voit donc que dans ce cas, pour résoudre la regle ci-dessus, il faut écrire d'abord pour troisieme et quatrieme termes de la proportion, les jours connus et les jours cherchés; ensuite comparer successivement, et en général avec les jours, les heures, les ouvriers, les longueurs, les largeurs et les profondeurs des fossés, et écrire à mesure les uns sous les autres les rapports provenus de ces comparaisons, et qu'on rangera dans un ordre direct et inverse, selon que le plus produira le plus ou le moins : on aura donc ce qui suit ;

32 : 36
1 9 12 : 8 1j.
2 72 : 64 2 :: 16j. : xj.
18 : 27 3
12 : 18

---

1 : 24 :: 1j. : 24j.

Il faudroit à présent multiplier l'un par l'autre tous les premiers termes de ces rapports, ainsi que tous les seconds; mais il sera bien plus expéditif d'opérer de la maniere suivante : D'abord on effacera 18 qui se trouve dans la premiere et dans la seconde ligne verticales; puis on effacera 36 dans la seconde, et au lieu de 72, on écrira seulement 2 à côté dans la premiere; ensuite on effacera 32 dans la premiere, et on écrira seulement 2 à côté de 64 dans la seconde; après quoi on supprimera les deux 2 provenus des deux dernieres opérations: observant maintenant que 12 fois 12, seuls nombres qui soient dans la premiere ligne, font 144, et qu'alors les deux antécédens 144 et 16 sont divisibles par 16, je mets 9 au lieu de 12 et 12 dans la premiere ligne, et j'écris 1j. à la place de 16j.; enfin prenant le 9e de 9 qui reste seul dans la premiere ligne, et de 27 dans la seconde, j'écris 1 et 3 à côté; ce qui réduit ma proportion à. ...... 1 : 3 fois 8 :: 1 : x, qui vaut évidemment 24 jours.

Si l'on reprend la premiere maniere depuis l'endroit où nous avons trouvé que la question proposée se réduisoit à celle-ci : 8 fois 36 ouvriers ont fait en 16 jours 72 fois 18 fois 12 metres-cubes; en combien de jours 12 fois 32 ouvriers en feront-ils 64 fois 27 fois 18, et que l'on effectue les multiplications indiquées, on aura : 288 ouvriers ont fait en 16 jours 15552 metres-cubes; en combien de jours 384 ouvriers en feront-ils 31104? En divisant les metres-cubes par les nombres respectifs d'ouvriers, on verra que chaque

ouvrier du premier nombre a fait $\frac{15552}{288}$, ou 54 metres-cubes, et que chaque ouvrier du second nombre en a fait $\frac{31104}{384}$, ou 81; ce qui réduit la question à celle-ci: s'il a fallu 16 jours pour faire 54 metres-cubes, combien en faudra-t-il pour en faire 81; qu'on résoudra par cette proportion $54:81::16:x$, ou $2:3::16:x$, ou enfin $1:3::8:x$, qui vaut évidemment 24, comme ci-dessus.

232. Nous pouvons donc dire qu'en général pour résoudre une regle de trois, quelque composée qu'elle soit, il faut placer pour le dernier terme du second rapport la quantité que l'on cherche, et pour le premier terme celui qui est de même espece: ensuite comparer successivement chaque terme d'espece différente, à la quantité qu'on cherche, ce qui donnera un nombre égal de rapports composans, qu'on écrira les uns sous les autres, et dans un ordre direct ou inverse, selon qu'à chaque comparaison, le plus produira le plus ou le moins; alors on fera les réductions, s'il y a lieu, et enfin on multipliera les quantités restantes et irréductibles les unes par les autres; ce qui ramenera la regle à une simple proportion, dont on trouvera le terme inconnu par l'article (214).

233. Les exemples suivans dirigeront les commençans dans l'application de cette regle aussi simple qu'utile, à des problêmes qu'il seroit fort long de résoudre avec le simple secours du raisonnement.

EXEMPLE IV.

Il a fallu 30 rouleaux de papier de 36,75 metres de long sur 1,75 de large, pour tapisser 2 appartemens de 4 pieces: on demande combien il faudra de rouleaux de 24,5 metres de long sur 1,5 de large, pour tapisser un seul appartement de 6 pieces; on suppose

de plus que les longueurs des premieres pieces et des secondes sont entr'elles :: $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{4}$, que les largeurs sont comme $\frac{3}{5}$: $\frac{5}{7}$, et enfin que les hauteurs sont :: $\frac{3}{8}$: $\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{rcl} 24,5 & : & 36,75 \\ 1,5 & : & 1,75 \\ 2 & : & 1 \\ 4 & : & 6 \\ \frac{2}{3} & : & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{5} & : & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{8} & : & \frac{2}{3} \end{array}\right\} :: 30^{R.} : x^{R.}$$

je pose d'abord pour les termes du dernier rapport 30 R. et x R. qui sont les rouleaux connus et cherchés. Ensuite comparant successivement tous les autres termes d'espece différente avec les rouleaux, je dis d'abord : plus les rouleaux ont de longueur, moins il en faut. Donc le plus produit le moins; j'écris donc dans un ordre inverse 36,75 et 24,5, c'est-à-dire, que j'écris 24,5 : 36,75; je dis ensuite : plus les rouleaux sont larges, moins il en faut; le plus produit donc encore le moins; j'écris donc sous le premier rapport 1,5 : 1,75 au lieu de 1,75 : 1,5. Comparant ensuite avec les rouleaux tour à tour le nombre des appartemens et des pieces, de leurs longueurs, de leurs largeurs et de leurs hauteurs, je vois que plus il y a d'appartemens et de pieces, que plus elles sont longues, larges et hautes, plus il faut de rouleaux; donc partout le plus produit le plus; j'écris donc, sous les deux premiers rapports, dans un ordre direct les rapports 2 : 1, 4 : 6, $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$: $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$: $\frac{2}{3}$. Il s'agit à présent de voir les réductions qu'on peut faire subir aux différens termes de ces rapports. Pour cela, je commence par faire disparoître les fractions, tant décimales qu'ordinaires. Pour les premieres, il suffit de rendre les nombres des chiffres décimaux le même,

et de supprimer la virgule : ainsi au lieu du rapport 24,5 : 36,75, j'écris d'abord 24,50 : 36,75, ensuite 2450 : 3675 ; de même 1,5 : 1,75 devient 150 : 175 ; quant aux fractions ordinaires (221), je vois que $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$ n'est autre chose que 8 : 9 ; que $\frac{3}{5} : \frac{5}{7}$ équivaut à 21 : 25 ; enfin que $\frac{3}{8} : \frac{2}{3}$ revient à 9 : 16. Substituant ces rapports aux premiers, j'ai

2 2450	:	3675 3				
150	:	175 7				
2	:	1		15 R.		R.
4	:	6	::	30	:	x
8	:	9				
21	:	25				
9	:	16				
4	:	25 :	::	15 R.	:	x

Voici donc notre regle ramenée à n'avoir pour ses termes que des entiers ; opérant donc, comme dans l'exemple III, je commence d'abord par supprimer 9 commun à la premiere et seconde colonnes, je vois ensuite dans la premiere 2 et 8 dont le produit est 16 qui se trouve dans la seconde ; je les supprime donc : je vois ensuite (152) que 2450 et 3675 sont divisibles par 25, prenant donc le 25e., j'ai 98 et 147 divisibles tous deux par 7, ce qui donne 14 et 21 qui, divisés encore par 7 donnent enfin 2 et 3 : de même 150 et 175 sont divisible par 25, et donnent pour quotient 6 et 7, il faudroit donc écrire 6 à côté de 150, et 7 à côté de 175 ; mais 6 se trouvant dans la seconde colonne, je l'efface, et je me contente d'écrire 7 à la place de 175. J'observe alors que j'ai 21 dans la premiere colonne et 3 fois 7 dans la seconde ; je les efface donc : enfin, pour ramener la regle à son plus grand degré de simplicité, je supprime le 2 de la premiere colonne, et prenant

nant la moitié de 30^R, j'ai 15^R que je mets à sa place : dans cet état les produits des termes restans dans la premiere colonne sont 4 et dans la seconde, 1 fois 25 ou 25 : j'ai donc à trouver le quatrieme terme de cette proportion $4 : 25 :: 15^R : x^R$, que je vois tout de suite valoir $\frac{375}{4}$, ou 93 rouleaux $\frac{3}{4}$.

EXEMPLE V.

Dans une bibliothèque on emploie à copier des manuscrits, deux sections d'écrivains; les uns plus âgés ne travaillent que le jour, et écrivent en ronde; les autres travaillent la nuit, et écrivent en coulée. Cela posé,

Les premiers, au nombre de 24, ont transcrit en 90 jours, et travaillant 8 heures par jour, 8 exemplaires d'un ouvrage *in*-4°, contenant 6 volumes, composant, l'un portant l'autre, 480 pages, chaque page 64 lignes, chaque ligne 56 lettres.

On demande en combien de nuits la seconde section, composée de 30 copistes, qui travaillent 6 heures par nuit, transcrira 9 exemplaires d'un ouvrage *in folio*, contenant 4 volumes, composant, l'un portant l'autre, 800 pages, chaque page 84 lignes, chaque ligne 80 lettres. On suppose à présent que la vitesse des premiers copistes est à celle des seconds :: 4 : 5; que la difficulté de travailler le jour est à celle de travailler la nuit :: 5 : 6, que celle de la ronde est à celle de la coulée :: 6 : 5; enfin que celle de lire le premier ouvrage est à celle de lire le second :: 8 : 7.

30		:	24				
6		:	8				
8		:	9				
6		:	4				
480		:	800				
54	3	:	84	28		5j.	
56		:	80	16	::	90j.	: $x^{n.}$
5		:	4				
5		:	6				
6		:	5				
8		:	7				
3		:	112		::	5j.	: $x^{n.}$

pour résoudre cette regle, qui renferme 24 termes, je pose d'abord pour dernier rapport les 90 jours et les nuits x correspondantes; ensuite leur comparant les autres termes, je dis: plus il y a d'ouvriers, et plus ils travaillent d'heures par jour ou par nuit, moins il faut de jours ou de nuits; le plus produit donc le moins; j'écris donc ces deux rapports dans un ordre inverse, et je les mets l'un sous l'autre: je poursuis en disant; plus il y a d'exemplaires, plus ils contiennent de volumes, plus ces volumes renferment de pages, plus les pages ont de lignes, et plus les lignes contiennent de lettres, plus, dans tous ces cinq cas, il faudra de jours ou de nuits: le plus produit donc le plus; j'écris donc ces cinq rapports sous les deux premiers, en les plaçant dans un ordre direct: passant alors aux quatre dernières conditions, j'observe que, plus la vîtesse des copistes est grande, moins il faudra de jours; le plus donnant le moins, j'écris ce rapport 4 : 5 dans un ordre inverse, en écrivant sous les sept premiers rapports 5 : 4; quant aux trois derniers rapports qui renferment toutes les espèces de difficultés de ce genre de travail, comme on voit qu'en général, plus l'ouvrage sera difficile, et plus il faudra de temps, il est clair qu'il faut placer

dans leur ordre naturel et sous les autres, les trois rapports 5 : 6, 6 : 5 et 8 : 7. Passons aux réductions : d'abord j'efface de part et d'autre 5 et 6, et 6 et 5, ensuite 8 et 8; je supprime ensuite les zéros de 30 et 480, et ceux de 800; je prends le 5e de 5 et de 80, et sans mettre 1 à la place de 5, je mets 16 à côté de 80; le produit 24 du premier et du dernier terme 3 et 8 de la premiere colonne, étant égal au premier terme 24 de la seconde, je les efface tous les trois; le produit des second et quatrieme termes, 6 et 6 de la premiere colonne, étant égal au produit des troisieme et quatrieme termes 9 et 4 de la seconde, je les supprime tous les quatre, le produit de 8 qui reste de 800 dans la seconde colonne, par le dernier terme 7, faisant 56, qui se trouve dans la premiere, je supprime 8, 7 et 56; j'efface 16 dans la seconde colonne, et prenant le 16e de 48 dans la premiere, au lieu de mettre le quotient 3 à sa place; je prends le tiers de 84 dans la seconde, et je mets ce tiers 28 à la place de 84; prenant enfin le 18e de 54, qui reste seul dans la premiere colonne, et de 90j, je mets 3 et 5j. à leur place; alors la proportion se réduit à 3 : 28 fois 4 :: 5j. : $x^{n.}$, ou 3 : 112 :: 5j. : $x^{n.}$, donc le nombre de nuits cherché vaut $\frac{560}{3}$ ou 186 $\frac{2}{3}$.

Nous allons donner encore un exemple, pour faire voir comment, dans certains cas, il faut se conduire pour comparer chaque terme à la quantité cherchée.

EXEMPLE VI.

60 ouvriers en 12 jours, et travaillant 10 heures par jour, ont creusé 5 fossés de 60 metres de longueur, sur 12 de largeur, et 7 de profondeur;

D'un autre côté 50 ouvriers, en 24 jours, et en travaillant 8 heures par jour, ont creusé 3 fossés, de 70 metres de longueur, sur 16 de largeur, et 6 de profondeur :

On suppose de plus, que la dureté du premier terrein étoit à celle du second :: 4 : 5; et l'on demande quelle étoit, dans toutes ces hypothèses, le rapports des forces des deux troupes d'ouvriers?

	50	:	60	
4	24	:	12	
	8	:	10	
	5	:	3	:: 1 : x
	60	:	70	
	12	:	16	
	7	:	6	
	4	:	5	
	4	:	3	:: 1 : x

je représente d'abord par 1 la force des premiers ouvriers, et par x celle des seconds : comparant ensuite les autres termes successivement avec les forces, je dis : plus on emploie d'ouvriers, moins ils doivent être forts; plus ils travaillent d'heures par jour, moins ils doivent être forts; plus il y a de fossés, plus ils doivent être forts; plus ces fossés sont longs, plus ils doivent être forts; plus ils sont larges, plus ils doivent être forts; plus ils sont profonds, plus ils doivent être forts; enfin, plus le terrein est dur, plus ils doivent être forts : on voit que tous les rapports sont directs, hors les deux premiers; on disposera donc tous les termes comme ils sont ci-dessus: alors on effacera de part et d'autre 60 et 60, 12 et 12, 5 et 5; ensuite le 0 de 50, et le 7 dans la premiere colonne, et 70 dans la seconde; on effacera encore le 5 dans la premiere, et prenant le 5e de 10 dans la seconde, on aura 2 qui, multiplié par le terme 16 feroit 32 : or dans la premiere 8 fois 4 feroient aussi 32; j'efface donc tous ces termes; prenant enfin le 6e de 24 dans la premiere, j'ai 4 que j'écris à côté, et j'efface 6 dans la seconde. Alors la regle se réduit à cette proportion 4 : 3 :: 1 : x qui vaut donc $\frac{3}{4}$: donc la force

des premiers est à celle des seconds :: 1 : $\frac{3}{4}$, ou :: 4 : 3.

Pour servir de preuve à cet exemple, et en même-temps pour lever un embarras plus grand encore que le précédent, supposons qu'on ait à résoudre la même question que ci-dessus, excepté qu'au lieu de chercher le rapport des forces, qu'on suppose être : : 4 : 3, on cherche le rapport des duretés des deux terreins, que nous savons d'ailleurs être : : 4 : 5.

	60	:	50				
	12	:	24				
2	10	:	8				
	3	:	5	: :	1	:	x
	70	:	60				
2	16	:	12				
	6	:	7				
	4	:	3				
	4	:	5	: :	1	:	x

Après avoir écrit 1 : x, pour représenter le rapport des duretés du terrein, je devrois leur comparer les autres terreins, en disant : plus il y a d'ouvriers, plus le terrein est dur, plus etc. ; mais les conséquences ne sont pas légitimes : alors je renverse mes comparaisons, en disant : plus le terrein est dur, 1°. plus il faut d'ouvriers ; 2°. plus il faut de jours ; 3°. plus il faut employer d'heures par jour ; 4°. moins on fera de fossés ; 5°. moins on fera de metres de long ; 6°. moins on en fera en largeur ; 7°. moins on en fera en profondeur ; 8°. enfin, plus il faudra de force. L'on voit donc que les trois premiers rapports et le dernier sont directs, tandis que les quatre autres sont inverses. Je les écris donc comme il est marqué ci-dessus, et faisant les réductions analogues à celles qui précedent, il restera 2 et 2 dans la premiere colonne, et 5 dans la seconde :

on aura donc la proportion $4 : 5 :: 1 : x$, qui vaudra donc $\frac{5}{4}$; les duretés seront donc $:: 1 : \frac{5}{4}$ ou $:: 4 : 5$, comme cela devoit être.

Au reste, si l'on éprouvoit par hasard de la difficulté à comparer, soit chaque terme de la question au terme cherché, soit le terme cherché à chaque terme de la question, on se conduiroit comme nous allons l'indiquer. Supposons donc que, tout étant posé comme dans la question précédente, on demandât encore le rapport des duretés, et qu'on éprouvât de la difficulté dans leur comparaison avec les autres termes, on choisiroit parmi tous les autres termes, deux termes de même espece, auxquels on jugeroit pouvoir comparer le plus facilement tous les autres, et on se conduiroit comme il suit :

5~~0~~	:	~~60~~						
~~8~~	:	~~10~~	2					
~~5~~	:	~~3~~			1ʲ		1ʲ	
~~60~~	:	~~70~~		::	~~12~~	:	~~24~~ʲ	
~~12~~	:	~~16~~	2					
~~7~~	:	~~6~~						
~~3~~	:	~~4~~						
~~1~~	:	x						
5	:	4 fois x		::	1ʲ	:	1ʲ	

Je choisis pour mon dernier rapport celui des jours qui est $12^j : 24^j$; ensuite je leur compare successivement les sept termes de différente espece qui se trouvent dans la question; c'est-à-dire, que j'observe que, plus il y a d'ouvriers, moins il faut de jour; plus etc... plus les forces sont grandes, moins il faut de jours. Ayant donc écrit ces sept rapports dans l'ordre indiqué par les résultats des comparaisons, je compare en dernier lieu les duretés aux jours, en disant : plus le terrein est dur, plus il faut de jours. Représentant donc ce rapport cherché par

$1 : x$, je l'écris au-dessous des autres et dans ce même ordre, parce que le plus produit le plus; alors j'efface dans les deux premieres colonnes les termes communs 60 et 60, 3 et 3, et ensuite 12 et 12 dans les deux antécédens, et à la place de 12^j dans le second, j'écris 1^j, parce que ce terme est seul; j'efface ensuite dans la premiere colonne le 0 de 50 et le 7, et dans le second, j'efface 70 : j'efface 8 dans la premiere, et prenant le huitieme de 16 dans la seconde, j'écris 2 à côté; j'efface encore 5 dans la premiere, et dans la seconde j'écris 2 à côté et la place de 10 : enfin dans les deux conséquens, je supprime les facteurs 4 et 6 d'un côté, et de l'autre 24, en mettant 1 à sa place. La regle est donc réduite à cette proportion, $5 : 4$ fois $x :: 1^j : 1^j$. Dans cet état, je divise par 4 les deux termes du premier rapport; alors le premier terme devient $\frac{5}{4}$; le second, qui est le produit des deux facteurs 4 et x, divisé par 4, qui est l'un d'eux, doit donner l'autre facteur ou x pour quotient : j'ai donc $\frac{5}{4} : x :: 1 : 1$ ou $1 : 1 :: \frac{5}{4} : x$; donc x, ou la dureté du second terrein, est représentée par $\frac{5}{4}$; donc le rapport des duretés des deux terreins est $:: 1 : \frac{5}{4}$ ou $:: 4 : 5$, comme on devoit effectivement le trouver.

235. C'est d'après les mêmes principes et les mêmes opérations, qu'on résoud les *regles d'intérêt et d'escompte*, que nous appellerons *composées*, parce qu'en effet elles dépendent d'une regle de trois composée. Voyons d'abord les premieres.

On demande combien, à $6\frac{1}{3}$ p. % par an, rapporteront 6540^f au bout de 8 mois 10 jours, ou de 8 mois $\frac{1}{3}$?

$$\begin{array}{l} 100 : 6540 \\ 12 : 8\frac{1}{3} :: 6\frac{1}{3} ; x \end{array}$$

comme je cherche l'intérêt, je pose pour les deux

s iv

termes du second rapport, l'intérêt connu $6\frac{1}{3}$ et l'intérêt cherché x; ensuite je dis : plus les capitaux sont grands, plus l'intérêt est grand; j'écris donc $100 : 6540$; ensuite, plus le temps est long, plus encore les intérêts sont grands; j'écris donc $12 : 8\frac{1}{3}$. Cela fait, j'ôte un o à 100 et à 6540, puis réduisant $8\frac{1}{3}$ en fraction, j'ai $\frac{25}{3}$; multipliant alors les deux termes du rapport $12 : \frac{25}{3}$ par 3, j'ai $36 : 25$; prenant le cinquieme de 10 et 25, et le sixieme de 36 et de 654, j'ai d'un côté 2 et 5, et de l'autre 6 et 109. La regle ci-dessus se change donc en

$$\begin{array}{l} 2 : 109 \\ 6 : \ \ 5 \end{array} :: 6\tfrac{1}{3} : x$$

ou $$12 : 545 :: 6\tfrac{1}{3} : x$$

multipliant alors 545 par $6\frac{1}{3}$, j'ai $3451\frac{2}{3}$, dont le 12e est $287\frac{23}{36}$, qui est l'intérêt cherché; si je l'ajoute au capital 6540, j'aurai $6827^f\frac{23}{36}$ ou $6827^f,639$ à un millieme près.

Si l'on m'eût donné cette question : 6540 francs ont rapporté en 8 mois $\frac{1}{3}$, $6827^f.\frac{23}{36}$, on demande à combien p. $\frac{0}{0}$ est l'intérêt par an? Comme $6827\frac{23}{36}$ renferme le capital 6540 et les intérêts, pour avoir ceux-ci, je retranche 6540 de $6827\frac{23}{36}$, le reste $287\frac{23}{36}$ exprime les intérêts. Alors j'opere comme il suit :

$$\begin{array}{l} 6540 : 100 \\ \frac{25}{3} : \ \ 12 \end{array} :: 287\tfrac{23}{36} : x$$

c'est-à-dire, que je place pour dernier rapport les intérêts connus et cherchés, en écrivant $287\frac{23}{36} : x$; alors raisonnant comme ci-dessus, j'ai pour les deux rapports composans $6540 : 100$ et $\frac{25}{3} : 12$ ou $25 : 36$; réduisant alors comme ci-dessus, je trouverai

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}109 : 2\\ 5 : 6\end{array}\right\} :: 287\tfrac{23}{36} : x$$

ou $545 : 12 :: 287\frac{23}{36} : x$; or 12 fois $287\frac{23}{36}$ font $3451\frac{2}{3}$ qui, divisés par 545 donnent 6 avec le reste $181\frac{2}{3}$ ou $\frac{545}{3}$ qui, divisé par 545, donne évidemment $\frac{1}{3}$; l'intérêt cherché monte donc à $6\frac{1}{3}$ p. % par an. On auroit encore pu résoudre ces regles, en raisonnant de la maniere suivante, sur le premier des deux exemples ci-dessus. Puisque l'intérêt est de $6\frac{1}{3}$ p. % pour un an ou 12 mois, on aura l'intérêt pour 8 mois $\frac{1}{3}$, en calculant le quatrieme terme de cette proportion $12 : 8\frac{1}{3} :: 6\frac{1}{3} : x$ ou $12 : \frac{25}{3} :: \frac{19}{3} : x$ qui vaudra donc le 12e de $\frac{475}{9}$ ou $\frac{475}{108}$; ensuite, puisque 100f rapportent d'intérêt $\frac{475}{108}$, on voit que pour trouver ce qu'en rapporteront 6540, il faut calculer le quatrieme terme de cette autre proportion....... $100 : 6540 :: \frac{475}{108} : x$ ou $10 : 654 :: \frac{475}{108} : x$, ou encore $5 : 327 :: \frac{475}{108} : x$, ou enfin $1 : 327 :: \frac{95}{108} : x$, qu'on aura en multipliant 327 par 95, et en divisant le produit 31065 par 108, ce qui donnera pour l'intérêt cherché $287\frac{69}{108}$ ou $287\frac{23}{36}$, comme on l'avoit déjà trouvé. On raisonneroit à peu près de la même maniere, pour résoudre le second exemple; mais il est évident que notre premiere méthode est plus courte, puisque 1°. l'on n'a qu'une proportion à faire, et 2°. les opérations sont moins compliquées. On peut donc dire qu'en général les regles d'intérêt composées, se résolvent comme des regles de trois composées, où les termes du second rapport sont les intérêts connus et cherchés, et les deux termes du premier forment un rapport directement composé des produits des capitaux et des temps respectivement relatifs à ces intérêts.

236. Passons aux regles d'escompte composées. Soit donc proposée cette question : un particulier place chez un banquier une certaine somme pour

laquelle, y compris les intérêts à $4\frac{1}{2}$ p. $\frac{0}{0}$ par an, il doit, au bout de l'année, toucher $1755^f,6$; mais 4 mois après, ayant besoin de son argent, il va prier le banquier de le payer, en lui offrant d'escompter l'intérêt pour les 8 mois restans ; on demande quelle somme le banquier doit lui payer.

Je pourrai trouver l'escompte, en raisonnant de la maniere suivante : $104^f\frac{1}{2}$ renferment le capital 100 francs avec les intérêts $4\frac{1}{2}$, de même que $1755^f,6$ renferment le capital et les intérêts inconnus ; je trouverai donc ces intérêts, en faisant cette proportion : $104\frac{1}{2} : 1755,6 :: 4\frac{1}{2} : x$, qui sera égal à $\frac{1755,6 \textit{ fois } 4\frac{1}{2}}{104\frac{1}{2}}$: j'ai donc dans cette expression, les intérêts pour un an ; donc, pour trouver ceux de 8 mois, je n'ai plus qu'à faire cette proportion : $12 : 8 :: \frac{1755,6 \textit{ fois } 4\frac{1}{2}}{104\frac{1}{2}} : x$, qui vaudra donc $\frac{8 \textit{ fois } 1755,6 \textit{ fois } 4\frac{1}{2}}{12 \textit{ fois } 104\frac{1}{2}}$. D'où l'on voit que pour obtenir l'escompte cherché, il faut multiplier l'intérêt connu par les fractions $\frac{8}{12}$ et $\frac{1755,6}{104\frac{1}{2}}$, ou par les rapports $12 : 8$ et $104\frac{1}{2} : 1755,6$; ce qui fournit la regle de trois composée :

$$\begin{array}{c}12 : 8\\ 104\frac{1}{2} : 1755,6\end{array} :: 4\frac{1}{2} : x \text{ ou } \begin{array}{c}3 : 2\\ 209 : 3511,2\end{array} :: \frac{9}{2} : x$$

ou $\begin{array}{c}1 : 2\\ 209 : 1170,4\end{array} :: \frac{9}{2} : x$; alors multipliant $\frac{9}{2}$ par 2 et par 1170,4, ou 9 par 1170,4, j'ai pour le produit des moyens 10533,6 qui, divisé par l'extrême 209, me donne $50^f,4$ pour l'escompte que le banquier doit prélever sur la somme $1755^f,6$; soustrayant donc de cette somme $50^f,4$, j'ai $1705^f,2$ pour la somme que le banquier doit payer.

Je serois arrivé au même résultat, en raisonnant et en opérant comme il suit : puisque pour 12 mois on a $4\frac{1}{2}$ d'intérêt, on trouvera celui de 4 mois par cette proportion : $12 : 4 :: 4\frac{1}{2} : x$, qui est égal à

$\frac{4 \text{ fois } 4\frac{1}{2}}{12}$ ou $\frac{3}{2}$; ensuite je dirois : puisque 104 $\frac{1}{2}$ se réduit à 101 $\frac{1}{2}$, le capital et les intérêts 1755,6 se réduiront à une somme qui se trouvera par cette proportion $104\frac{1}{2} : 1775{,}6 :: 101\frac{1}{2} : x$ ou $209 : 1755{,}6 :: 203 : x$ ou, en divisant les deux premiers termes par 209, $1 : 8{,}4 :: 203 : x$, qui vaut donc 203 fois 8,4 ou 1705^{l},2, comme ci-dessus. En se servant de la premiere de ces deux solutions qui est la plus courte, on voit, 1°. que les regles d'escompte composées, se résolvent comme les regles de trois composées, où les termes du second rapport sont l'intérêt connu et l'escompte cherché, tandis que les deux termes du premier forment un rapport directement composé des produits des capitaux joints aux intérêts, et des temps respectivement relatifs aux intérêts du second rapport ; 2°. que la regle d'intérêt et celle d'escompte ont la plus grande analogie, puisque toute la différence consiste en ce que, dans la premiere, les capitaux seuls entrent dans le rapport composé, au lieu que dans la seconde, on emploie les capitaux joints aux intérêts.

237. C'est encore par les rapports composés, qu'on peut résoudre toutes les questions relatives à la regle suivante, qu'on appelle regle *conjointe*, et qui est du plus grand usage dans la banque.

Soit proposé, par exemple, de résoudre le probléme suivant. Pour 3 *livres* de France, on a, en Angleterre, 31 $\frac{1}{2}$ *deniers sterlings ;* la *livre sterling*, ou 240 *deniers sterlings*, valent, en Hollande, 405 *deniers de gros* ; 50 deniers de gros rapportent, en Espagne, 189 maravédis ; on demande combien on aura de maravédis pour 1800 livres de France.

On voit clairement que, puisque 3 liv. valent 31 $\frac{1}{2}$ deniers sterlings, 1 liv. vaut $\frac{31\frac{1}{2}}{3}$ de deniers sterlings ; que 240 deniers sterlings valant 405 deniers

de gros, 1 denier sterling vaut $\frac{405}{140}$ deniers de gros; et que par conséquent 1 liv. vaut $\frac{31\frac{1}{2}}{3}$ de $\frac{405}{240}$ deniers de gros; que 50 deniers de gros valant 189 maravédis, le denier de gros vaut $\frac{189}{50}$ de maravédis; donc la livre vaut les $\frac{31\frac{1}{2}}{3}$ des $\frac{405}{240}$ de $\frac{189}{50}$ de maravédis; donc pour avoir la valeur de 1800 livres en maravédis, il faudra multiplier ces fractions de fractions par 1800; or on voit tout de suite qu'on arriveroit au même résultat, en formant cette regle de trois composée

$$\begin{array}{rcl} 3 & : & 31\frac{1}{2} \\ 240 & : & 405 \\ 50 & : & 189 \end{array} \quad :: \quad 1800 : x$$

en multipliant par 2 les deux termes du premier rapport, ce qui donne 6 : 63 ou 2 : 21; divisant ceux du second par 15, ce qui fait 16 : 27; la regle ci-dessus deviendra

$$\begin{array}{rcl} 2 & : & 21 \\ 16 & : & 27 \\ 50 & : & 189 \end{array} \quad :: \quad 1800 : x$$

Si on divise ici 50 et 1800 par 50, ou aura pour quotiens 1 et 36; si on divise encore par 4 ce dernier nombre, et le terme 16 de la premiere colonne, on aura 9 et 4; de sorte que la proportion, simplifiée autant qu'il est possible, se réduit à

$$\begin{array}{rcl} 2 & : & 21 \\ 4 & : & 27 \\ 1 & : & 189 \end{array} \quad :: 9 : x$$

ou $8 : 107163 :: 9 : x$ qui vaut donc $\frac{9 \text{ fois } 107163}{8}$ ou $\frac{964467}{8}$ de maravédis ou $120558\frac{3}{8}$ de maravédis : cette regle est trop simple pour nous y arrêter plus long-temps. Passons à d'autres.

238. Voyons d'abord la regle *d'alliage*, ainsi nom-

mée, parce qu'étant donnés le nombre et le prix de plusieurs choses *alliées*, on demande le prix de chaque unité de *l'alliage*. Proposons-nous pour exemple la question suivante :

EXEMPLE I.

Un marchand de vin a mêlé ensemble 64 bouteilles de vin à 7ſ 6đ, 60 bouteilles à 10ſ, 80 bouteilles à 12ſ 6đ, et 144 bouteilles à 15ſ ; on demande à combien revient la bouteille ?

Il est clair que 64 bouteilles à 7ſ 6đ, valent 480ſ ; que 60 bouteilles à 10ſ, valent 600ſ ; que 80 bouteilles à 12ſ 6đ, valent 1000ſ et que 144 bouteilles à 15ſ, valent 2160ſ ; à présent, ajoutons les 4 nombres de bouteilles et leurs prix.

64 bouteilles	480ſ		29
60	600	4240	348
80	1000	760	12ſ 2 $\frac{6}{29}$
144	2160	64	
348 bouteilles	4240	6	

Nous trouverons que les 348 bouteilles reviennent à 4240ſ : or il est évident que l'on trouvera le prix d'une bouteille, en cherchant le quatrieme terme de cette proportion 348 : 1 : : 4240 : x; c'est-à-dire, en divisant le prix total par le nombre total de bouteilles, division dans laquelle on observera, qu'au lieu de multiplier 64ſ par 12, et de diviser le produit par 348, nous avons divisé, pour abréger, 64 par 29, 12e de 348. Donc pour résoudre la regle d'alliage, il faut trouver séparément les prix de chaque espece de choses qui entrent dans le mélange, ce qui se fera en multipliant le nombre de chaque espece de ces choses par le prix respectif; ensuite ajouter d'un côté tous ces prix, et de l'autre

tous les nombres de choses; enfin diviser la premiere somme par la seconde. Telle est en effet la regle qu'on donne dans les *Elémens d'Arithmétique* ; mais nous allons faire voir qu'elle est susceptible d'abréviation , après que nous aurons fait la remarque suivante.

Au lieu de réduire les prix en sols, il eût été plus court de les réduire en livres, en regardant 7ſ 6ð, 10ſ, 12ſ 6ð et 15ſ, comme $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{3}{4}$ de livre; alors opérant absolument comme ci dessus, on auroit trouvé les résultats suivans.

64	60	80	144	24	64
$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	30	60
16₶		40	72	50	80
8		10	36	108	144
24₶	30₶	50₶	108₶	212₶	348

```
        29
        87
 212   {348
   5   {0₶  12ſ  2ð 6/29
 1060
   16
   64
```

on voit que le quotient 0₶ 12ſ 2ð $\frac{6}{29}$ est le même que ci-dessus.

Si l'on observe que 60 bouteilles à 10ſ valent autant que 60 bouteilles à 7ſ 6ð, et 60 bouteilles à 2ſ 6ð ; que 80 bouteilles à 12ſ 6ð coûtent autant que 80 bouteilles à 7ſ 6ð, et 80 bouteilles à 5ſ, enfin, que 144 bouteilles à 15ſ valent autant que 144 bouteilles à 7ſ 6ð, et 144 bouteilles à 7ſ 6ð, on verra que les bouteilles ci-dessus valent autant que

64 bouteilles, plus 60 bouteilles, plus 80 bouteilles, plus 144 bouteilles, c'est-à-dire, que 348 bouteilles, toutes à 7ſ 6ᵭ, plus 60 bouteilles à 2ſ 6ᵭ, plus 80 bouteilles à 5ſ, plus 144 bouteilles à 7ſ 6ᵭ. Or, nous disons que, pour avoir le prix moyen de la bouteille, il faut diviser le prix total par le nombre de bouteilles : donc ici où le prix total est 348 fois 7ſ 6ᵭ, plus 60 fois 2ſ 6ᵭ, plus 80 fois 5ſ, plus enfin 144 fois 7ſ 6ᵭ, il faut diviser ces quatre prix par 348, nombre des bouteilles; mais 348 fois 7ſ 6ᵭ, divisé par 348, donne 7ſ 6ᵭ, prix le plus bas de toutes les espèces de bouteilles; je puis donc me contenter de diviser 60 fois 2ſ 6ᵭ, ou 60 fois $\frac{1}{8}$ de livre, ou enfin 7₶ 10ſ, plus 80 fois 5ſ, ou 80 fois $\frac{1}{4}$ de livre, ou 20₶, plus enfin 144 fois 7ſ 6ᵭ, ou 144 fois $\frac{3}{8}$ de livre, ou enfin 54₶, par 348, nombre total des bouteilles; or 7₶ 10ſ, plus 20₶, plus 54₶, font 81₶ 10ſ, qui, divisés par 348, donneront pour quotient 4ſ 8ᵭ $\frac{6}{29}$: les ajoutant avec le prix le plus bas 7ſ 6ᵭ, j'aurois 12ſ 2ᵭ $\frac{6}{29}$, comme ci-dessus. Voyez les opérations suivantes.

			7₶ 10ſ	81₶ 10ſ	348 (29)
60	80	144	20	20	4ſ 8ᵭ $\frac{6}{29}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	54	1630	7ſ 6ᵭ
7₶ 10ſ	20₶	54₶	81₶ 10ſ	238	12ſ 2ᵭ $\frac{6}{29}$
				6	

on voit donc que, pour faire la regle d'alliage, il faut retrancher le prix le plus bas de tous les autres prix, multiplier ces restes par le nombre de choses correspondantes; ajouter les produits, et diviser la somme par le nombre total des choses, et enfin ajouter le quotient avec le prix le plus bas; la somme donnera la valeur de l'unité du mélange.

Nous verrons dans l'exemple III, ci-dessous, combien cette nouvelle méthode est plus abrégée que l'autre.

EXEMPLE II.

On emploie, dans un attelier public, 40 ouvriers, qui gagnent $1^{f.},05$ par jour; 36 qui en gagnent 1,25 par jour; 24 à $2^{f},05$ et 12 à $3^{f},65$; on demande à combien, l'un portant l'autre, chaque ouvrier revient par jour ?

Je commence par retrancher le plus bas prix $1^{f},05$ des trois autres, et j'ai les 3 restes 20 centimes, ou 2 décimes, ou $0^{f},2$, $1^{f.}$ et $2^{f.},6$; alors j'opère comme il suit :

				40
			$7^{f.},2$	36
36	24	12	24	24
$0^{f.},2$	$1^{f.}$	$2^{f.},6$	31 ,2	12
$7^{f.},2$	$24^{f.}$	$31^{f},2$	$62^{f.},4$	112

$62^{f},4$ | 112
6 40 | $0^{f},557\frac{1}{7}$
800 | 1 ,05
16 | $1^{f.},607\frac{1}{7}$

c'est à-dire que je multiplie ces trois restes par les nombres 36, 24 et 12 des ouvriers correspondans; qu'ensuite j'ajoute et ces trois produits et les nombres des ouvriers, et que je divise la premiere somme par la seconde; enfin qu'ayant trouvé le quotient $0^{f.},557\frac{16}{112}$, ou $0^{f},557\frac{1}{7}$, je lui ajoute le plus bas prix $1^{f.},05$; ce qui donne pour le prix de chaque ouvrier $1^{f.},607\frac{1}{7}$.

Si j'eusse opéré de la maniere ordinaire, j'aurois trouvé le même résultat, mais plus longuement, comme on peut le voir ci-dessous.

40	36	24	12	42	40
1f.,05	1f,25	2f,05	3f,65	45	36
42f.	7 50	8 20	43f,80	49,2	24
	37 5	41 0		43,8	12
	45f.,00	49f,20		180 f.	112

180f.	112
680	1f.,607 $\frac{1}{7}$
800	
16	

c'est de cette maniere qu'on peut encore résoudre le probléme suivant :

EXEMPLE III.

On a fait mesurer une distance à plusieurs reprises; 2 fois on a trouvé 2154 metres, 48; 3 fois elle a donné 2153m.,45; 4 fois le résultat a été 2154m.,26, et enfin 2 fois il a été de 2153m.,96; quelle est la mesure moyenne?

Je retranche successivement la plus petite mesure 2153m.,45 des trois autres, et les trois restes sont 1m.,03, 0m.,81 et 0m.,51, alors j'opere comme il suit :

			2m,06
1m.,03	0m,81	0m,51	3 ,24
2	4	2	1 ,02
2m.,06	3m,24	1m.,02	6m,32

6m.,32	11	2153m.,45
82	0M,57 $\frac{5}{11}$	0 ,57 $\frac{5}{11}$
5		2154m,02. $\frac{5}{11}$

on voit que la réponse est 2154m.02 $\frac{5}{11}$. Mais si l'on

eût suivi la marche ordinaire, elle eût été bien plus longue, car il eût fallu opérer comme on le voit ci-dessous.

2154m.,48	2153m.,45	2154m.,26	2153m.,96
2	3	4	2
4308m,96	6460m.,35	8617m,04	4307m.,92

4308m.,96	
6460 ,35	
8617 ,04	
4307 ,92	
23694m,27	23694m.,27 ÷ 11 = 2154m.,02 $\frac{5}{11}$

239. Voyons à présent la regle de *société*, regle ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager entre plusieurs *associés*, le gain ou la perte provenant de leur société.

EXEMPLE I.

Trois marchands ont mis en société, le premier 600f., le second 800f, et le troisieme 400f.; ils ont gagné 900f; on demande la part qui revient à chacun.

Il est clair que chaque gain doit être proportionnel à la mise correspondante; d'un autre côté la somme des mises 600f, 800f, et 400f. faisant 1800f, on voit que le premier a fait les $\frac{600}{1800}$, ou les $\frac{6}{18}$, ou les $\frac{3}{9}$ des fonds; que le second en a fait les $\frac{800}{1800}$, ou les $\frac{4}{9}$; enfin, que le troisieme en a fait les $\frac{400}{1800}$, ou les $\frac{2}{9}$; d'où il suit que le premier doit avoir les $\frac{3}{9}$ du gain, le second, les $\frac{4}{9}$, et le troisieme, les $\frac{2}{9}$; on trouvera donc chaque gain particulier par ces trois proportions:

$9 : 3 :: 900 : x \quad 1 : 3 :: 100 : x$ ou $300^{f.}$
$9 : 4 :: 900 : x$ ou $1 : 4 :: 100 : x$ ou 400
$9 : 2 :: 900 : x \quad 1 : 2 :: 100 : x$ ou 200

$900^{f.}$

on voit donc que, pour trouver le gain correspondant à chaque mise, il faut faire autant de regles de trois, qu'il y a de mises; placer dans ces regles, pour antécédens, la mise totale et le gain total; pour premier conséquent successivement chacune des mises, et réduire ensuite les termes, quand il y aura lieu; alors le quotient du produit des moyens par l'extrême connu, donnera le gain correspondant.

Ainsi, dans l'exemple précédent, j'aurois dû écrire:

$1800 : 600 :: 900 : x$
$1800 : 800 :: 900 : x$
$1800 : 400 :: 900 : x$

mais si l'on divise partout les deux premiers termes par 200, on aura les trois premieres des proportions ci-dessus. Si dans ces trois mêmes proportions, on divise les antécédens par 900, on aura ces trois proportions:

$2 : 600 :: 1 : x \quad 1 : 300 :: 1 : x$ ou $300^{f.}$
$2 : 800 :: 1 : x$ ou $1 : 400 :: 1 : x$ ou 400
$2 : 400 :: 1 : x \quad 1 : 200 :: 1 : x$ ou 200

$900^{f.}$

on pourroit croire qu'il est inutile de trouver le dernier gain par le moyen de la derniere proportion, et que pour cela il suffiroit de retrancher la somme des gains déjà trouvés du gain total; mais il est, au

contraire essentiel de chercher ce gain comme les autres ; car ce n'est que par-là qu'on peut faire la preuve de l'opération : en effet, puisque le premier marchand a les $\frac{3}{9}$ du gain, le second, les $\frac{4}{9}$, et le troisieme, les $\frac{2}{9}$, ils ont à eux trois les $\frac{9}{9}$ du gain, ou le gain total, ce qui d'ailleurs est évident : donc il faut qu'en ajoutant les trois gains particuliers, on ait pour somme le gain total : donc en cherchant le dernier gain comme les autres, et les ajoutant ensuite tous ensemble, on sera sûr, si leur somme est égale au gain total, que les opérations ont été bien faites ; au lieu qu'en trouvant ce gain au moyen de la soustraction, on ne pourroit pas découvrir l'erreur, s'il y en avoit dans le premier ou dans le second gain, ou dans le premier et le second à la fois.

EXEMPLE II.

Quatre négocians ont mis en société, le premier 100000f, le second 84000f, le troisieme 63000f., et le quatrieme seulement 23000f ; mais comme il s'est chargé de toute la conduite de l'affaire, il doit d'abord prélever les 2 pr. $\frac{0}{0}$ du gain total, qui se trouve monter à 54000f. ; on demande le gain de chacun.

Je commence par prendre les 2 pr. $\frac{0}{0}$ de 54000f., au moyen de cette proportion $100 : 2 :: 54000 : x$, ou $1 : 2 :: 540 : x$, qui vaut donc 1080 ; la somme à partager n'est donc plus que 52920f., alors ayant trouvé que la somme des mises est 270000f, je trouve chaque gain au moyen des quatre regles suivantes.

$$270000 : 100000 :: 52920 : x$$
$$270000 : 84000 :: 52920 : x$$
$$270000 : 63000 :: 52920 : x$$
$$270000 : 23000 :: 52920 : x$$

ou en divisant d'abord tous les deux premiers termes par 1000, et ensuite les antécédens par 10,

$27 : 100 :: 5292 : x$
$27 : 84 :: 5292 : x$
$27 : 63 :: 5292 : x$
$27 : 23 :: 5292 : x$

ou en divisant tous les antécédens par 27,

$1 : 100 :: 196 : x$ ou 19600f part du 1er.
$1 : 84 :: 196 : x$ ou 16464 part du 2e.
$1 : 63 :: 196 : x$ ou 12348 part du 3e.
$1 : 23 :: 196 : x$ ou 4508 } 5588f.
1080 } part du 4e.

gain total..... 54000f.

Ayant trouvé les gains ci-dessus, j'ajoute 1080f à la part du quatrieme, et j'ai 5588f. pour cette part; ensuite, pour savoir si les opérations ont été bien faites, j'ajoute ensemble les quatre gains trouvés; comme ils reproduisent le gain total, j'en conclus que la regle est bonne.

240. La regle de société s'appelleroit *composée*, si la question, outre les mises, renfermoit encore les temps, comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III.

Quatre négocians ont mis ensemble, le premier 16400f, qui ont été 16 mois dans la société; le second 20500, qui y ont été 10 mois; le troisieme 40000, qui y ont été 6 mois; et le quatrieme 50100, qui y ont été 4 mois; ils ont gagné 21000f : on demande le gain de chacun.

Pour résoudre ce probléme, je commence par observer que 16400f, qui ont été 16 mois dans la société, doivent rapporter autant que 16 fois 16400f. pendant un mois; de même que 20500f pendant 10

mois, 40000ᶠ pendant 6 mois, et 50100ᶠ pendant 4 mois, doivent rapporter autant que 10 fois 20500ᶠ, 6 fois 40000ᶠ, et 4 fois 50100ᶠ pendant un mois. Faisant donc les multiplications indiquées, j'ai les quatre produits suivans :

16400ᶠ	20500ᶠ	40000	50100ᶠ
16	10	6	4
984			
164			
262400ᶠ	205000ᶠ	240000ᶠ	200400ᶠ

la regle étant alors ramenée à celle de société simple, j'opere comme il suit :

262400	$907800 : 262400 :: 21000 : x$
205000	$907800 : 205000 :: 21000 : x$
240000	$907800 : 240000 :: 21000 : x$
200400	$907800 : 200400 :: 21000 : x$
907800	

Ou en supprimant deux zéros dans tous les deux premiers termes, et divisant ensuite les antécédens par 6,

$$1513 : 2624 :: 3500 : x$$
$$1513 : 2050 :: 3500 : x$$
$$1513 : 2400 :: 3500 : x$$
$$1513 : 2004 :: 3500 : x$$

2624		2050	
7		7	
183680		143500	
9184000	1513	7175000	1513
10600	6070ᶠ $\frac{90}{1513}$	11230	4742ᶠ $\frac{354}{1513}$
90	part du 1ᵉʳ	6390	part du 2ᵉ.
		3380	
		354	

2400
7
168000
8400000 | 1513
8350 | $5551^f \frac{1337}{1513}$
7850 | part du 3ᵉ.
2850
1337

2004
7
140280
7014000 | 1513
9620 | $4635^f \frac{1245}{1513}$
5420 | part du 4ᵉ.
8810
1245

Preuve.

$6070^f \frac{90}{1513}$
$4742 \frac{354}{1513}$
$5551 \frac{1337}{1513}$
$4635 \frac{1245}{1513}$
21000^f.

en observant, 1°. que pour multiplier chaque second terme par 3500, qui vaut 7 fois 5 fois 100, j'ai d'abord multiplié par 7, qu'ensuite au produit j'ai ajouté un zéro et pris la moitié de la somme, ce qui revient à multiplier par $\frac{10}{2}$ ou 5, et qu'enfin à chaque moitié j'ai ajouté deux zéros, pour effectuer la derniere multiplication par 100; 2°. que j'ai ajouté les quatre parts, ce qui m'a donné le gain total 21000^f, et ce qui prouve que l'opération a été bien faite.

241. C'est par des principes et des opérations semblables, qu'on peut résoudre le problème suivant, relatif aux *parts de prises*.

EXEMPLE IV.

Un vaisseau de guerre a capturé plusieurs navires ennemis, dont la prise est estimée 1000000^f: on

demande comment on doit repartir cette somme sur chaque individu de l'équipage, d'après le tableau suivant (1)

NOMBRE des PERSONNES.	LEURS RANGS.	PARTS INDIVIDUELLES.	PARTS GÉNÉRALES.
1	Capitaine.	72	72
1	1er. Lieutenant.	64	64
1	2e. Lieutenant.	60	60
4	Officiers.	48	192
8	Enseignes.	40	320
16	Gardes-marines.	32	512
2	Secrétaires.	20	40
4	Fourriers.	16	64
16	Sergens.	12	192
48	Caporaux.	8	384
72	Maîtres-Canonniers.	12	864
144	Aides-Canonniers.	8	1152
288	Canonniers.	4	1152
240	Fusilliers.	2	480
1	Maître-Pilote.	16	16
2	Aides-Pilotes.	12	24
2	Maîtres-Timonniers.	12	24
4	Aides-Timonniers.	8	32
3	Cambusiers.	12	36
309	Matelots.	2	618
94	Mousses.	1	94
		Somme des parts....	6392

On voit que, puisque d'un côté la somme des

(1) Comme ce tableau est tout entier de mémoire, nous avertissons que nous pouvons nous être trompés sur le nombre ou le rang, ou la part, ou même le nom des individus qui le composent; mais ces erreurs sont très-indifférentes, vu qu'elles n'influent aucunement, tant sur la théorie que sur la pratique de la règle.

Digitized by Google

parts est de 6392, et que de l'autre elle est de 1000000^{f}., on trouvera la valeur de chaque part en argent, en faisant cette proportion 6392 : 1000000 :: 1 : x, ou $\frac{1000000}{6392}$, ou 156^{f},44556 ; on voit donc qu'une part, c'est-à-dire, celle du mousse, est de 156^{f},44556 ; mais comme on ne peut pas payer plus bas qu'un centime, et que de l'autre côté il est juste que celui qui a le moins de parts, soit un peu dédommagé, nous supposerons que tous les simples canonniers, les fusilliers, les matelots et les mousses recevront sur le pied de 156^{f},45 centimes la part, tandis que tous les autres recevront sur celui de 156^{f},44. Cela posé, on fera les calculs suivans.

156^{f},45 part du mousse. 2	156^{f},45 94 625 80 14080 5 14706^{f},3 part des 94 mousses.
312^{f},9 part du fusilier et 2 du matelot.	312^{f},9 120 37548 2 75096^{f}. part des 240 fusiliers. 312^{f},9 309 2816 1 9387 96686^{f},1 part des 309 matelots.
625^{f},8 part du canonnier.	625^{f},8 288 5006 4 50064 12516 180230^{f},4 part des 288 canonn.

156^{f},44
8

1251^{f},52 part du caporal, de l'aide-canonnier et de l'aide-timonnier..

625,76

1877^{f},28 { part du sergent, du m^{e}.-canonnier, de l'aide-pilote; du m^{e}.-timonnier et du cambusier.

1251^{f},52
2

2503^{f},04 part du fourrier et du m^{e}.-pilote.

1877^{f},28
1251,52

3128^{f},80 part du secrétaire.

1251^{f},52
4

5006^{f},08 part des 4 aides-timoniers.
12

60072^{f},96 part des 48 caporaux.
3

180218^{f},88 part des 144 aides-canonniers.

1877^{f},28
2

3754^{f},56 part des 2 aides-pilotes
1877,28 et des 2 m^{es}.-timoniers

5631^{f},84 part des 3 cambusiers.

3754^{f},56
8

30036^{f},48 part des 16 sergens.

5631^{f},84
12

67582^{f},08
2

135164^{f},16 part des 72 maîtres-canonniers.

2503^{f},04 part de 1 maître-pilote
4

10012^{f},16 part des 4 fourriers.

3128^{f},80
2

6257^{f},60 part des 2 secrétaires.

2503^f,04 2 5006^f,08 part du garde-marine.	5006^f,08 4 20024^f,32 4 80097^f,28 part des 16 gardes-marines.
3128^f,80 2 6257^f,60 part de l'enseigne. 1251, 52	6257^f,60 8 50060^f,80 part des 8 enseignes.
7509^f,12 part de l'officier. 1877, 28	7509^f,12 4 30036^f,48 part des 4 officiers.
9386^f,40 part du deuxieme lieutenant.	9386^f,40 part du 2e. lieutenant.
10012^f,16 part du premier lieutenant. 1251, 52	10012^f,16 part du 1er lieutenant.
11263^f,68 part du capitaine.	11263^f,68 part du capitaine.

la part du mousse étant de 156^f,45, on aura celle des 94 mousses, en multipliant cette somme par 94, ce qui donnera 14706^f,3 pour la part de ces 94 mousses. Pour avoir ensuite ce qui revient au matelot et au fusilier qui ont 2 parts, on doublera celle du mousse, ce qui donnera 312^f,9, pour la part de chaque matelot, et de chaque fusilier, et par conséquent, en multipliant cette somme, d'abord par 120, et ensuite par 2, on aura 75096^f pour la part des 240 fusiliers; multipliant de nouveau cette somme par 309, on aura 96686^f,1 pour la part des 309 matelots. Le ca-

nonnier ayant 4 parts, on doublera 312f,9 et on aura 625,8 pour la part du canonnier, et par conséquent, en multipliant 625f,8 par 288, nombre des canonniers, on aura 180230f,4 pour la part des 288 canonniers. Ici finissent les parts à 156f 45. Le caporal, l'aide-canonnier, et l'aide-timonier ayant chacun 8 parts, j'ai ce qui leur revient, en multipliant la part 156f,44 par 8, ce qui fait 1251f,52. Multipliant cette somme par 4, j'ai 5006f,08 pour la part des 4 aides-timoniers; multipliant celle-ci par 12, j'ai 60072f,96 pour la part des 48 caporaux, enfin multipliant cette derniere par 3, j'ai 180218f,88 pour la part des 144 aides-canonniers. Le sergent, le maître-canonnier, l'aide-pilote, le maître-timonnier et le cambusier ayant également 12 parts, à la précédente somme 1251f,52, qui vaut 8 parts, j'en ajoute la moitié, et j'ai 1877f,28 pour leur part. La doublant, j'ai 3754f,56 pour la part des 2 aides-pilotes et des 2 maîtres-timonniers; l'ajoutant à ce double, j'ai 5631f,84 pour la part des 3 cambusiers; multipliant ce double par 8, j'ai 30036f,48 pour la part des 16 sergens: enfin multipliant encore ce double et par 12 et par 2, j'ai 135164f,16 pour la part des 72 maîtres-canonniers. Le fourrier et le maître-pilote ayant le double du caporal, ou de 1251f,52, je double cette somme, et j'ai 2503f,04 pour la part du maître-pilote, et 4 fois cette somme, ou 10012f,16 pour celle des 4 fourriers: le secrétaire ayant 20 parts, ou autant que le maître-canonnier et le caporal ensemble, j'ajoute leurs parts 1877f,28 et 1251f,52, et j'ai 3128f,80 pour la part du secrétaire, et en doublant, 6257f,60 pour la part des 2 secrétaires. Le garde-marine ayant le double du fourrier, je double la part de celui-ci, ou 2503f,04, et j'ai 5006f,08 pour la part du garde-marine, et en multipliant cette somme deux fois de suite, par 4, 80097f,28 pour la part des 16 gardes-marines; l'enseigne ayant aussi le double du secré-

taire, qui a 3128f,80, je double cette somme, et j'ai 6257f,60 pour sa part, et par conséquent 8 fois cette somme, ou 50060f,80 pour celle des 8 enseignes. L'officier devant avoir autant que l'enseigne et le caporal, à la part de l'enseigne 6257f,60 j'ajoute 1251f,52, part du caporal, et je trouve que l'officier a 7509f,12, et les 4,30036f,48; le second lieutenant ayant autant que l'officier et le sergent, à la part ci-dessus 7509f,12 j'ajoute 1877f,28, part du sergent, et je trouve pour la somme qui lui revient 9386f,40. Le premier lieutenant ayant 64 parts, tandis que le fourrier n'en a que 16, il doit donc avoir autant que les 4 fourriers, ou 10012f,16 pour sa part: enfin le capitaine ayant 72 parts, ou autant que le premier lieutenant et le caporal, à la part de celui-là, c'est-à-dire, à 10012f,16 j'ajoute 1251f,52, part du caporal, et j'ai 11263f,68 pour la part du capitaine. J'ai fait et expliqué ces calculs, tout au long, pour apprendre aux commençans à tâcher de ne faire aucun calcul inutile. Si à présent on rassemble toutes les parts, tant individuelles que générales, on en pourra former le tableau suivant, correspondant au premier qu'on a vu plus haut.

NOMBRE des PERSONNES.	LEURS RANGS.	PARTS INDIVIDUELLES	PARTS GÉNÉRALES.
1	Capitaine.	11263f,68	11263f,68
1	1er. Lieutenant.	10012,16	10012,16
1	2e. Lieutenant.	9386,40	9386,40
4	Officiers.	7509,12	30036,48
8	Enseignes.	6257,60	50060,80
16	Gardes Marines.	5006,08	80097,28
2	Secrétaires.	3128,80	6257,60
4	Fourriers.	2503,04	10012,16
16	Sergens.	1877,28	30036,48
48	Caporaux.	1251,52	60072,96
72	Maîtres-Canonniers.	1877,28	135164,16
144	Aides-Canonniers.	1251,52	180218,88
288	Canonniers.	625,80	180230,40
240	Fusiliers.	312,90	75096,00
1	Maître-Pilote.	2503,04	2503,04
2	Aides-Pilotes.	1877,28	3754,56
2	Maîtres-Timonniers.	1877,28	3754,56
4	Aides-Timonniers.	1251,52	5006,08
3	Cambusiers.	1877,28	5631,84
309	Matelots.	312,90	96686,10
94	Mousses.	156,45	114706,30
		Somme des parts....	999987f,92

On voit que la différence de 999987f.,92 à 1000000f. est de 12f,08. Cela provient de ce que l'on a négligé, et l'on peut s'en assurer de la maniere suivante : en donnant aux canonniers, fusiliers, matelots et mousses 156f,45 au lieu de 156f,44556, on a donné à chacun 0,centime444 de trop ; donc puisque la somme de toutes les parts de ces 4 classes est de 1152, plus 480, plus 618, plus 94, ou de 2344, on a pris 2344 fois 0c,444 de trop, c'est-à-dire, 1040c,736; d'un autre

côté, chaque part du reste de l'équipage n'étant que de 156f,44, elle perd 0c,556; or, elles sont au nombre de 4048; donc on a pris 4048 fois 0c.,556 de moins, ou 2250c.,688. Retranchant ce produit de 1040c.,736, on aura pour reste 1209c,952, ou 12f.,09, c'est-à-dire, la même différence qu'on vient de trouver, à 1 centime près, différence qui ne vient elle-même que de ce qu'on n'a évalué la part qu'aux cent-milliemes près.

242. Nous allons terminer cette premiere partie de l'Arithmétique par la regle de *fausse position*, ainsi nommée, parce qu'on *pose* en avant un nombre *faux*, pour obtenir par son moyen le nombre véritable : mais comme ces problémes rentrent à-peu-près les uns dans les autres, nous n'en exposerons que ceux qui ont des rapports éloignés, et nous commencerons par le suivant, parce qu'il a beaucoup de rapport à la regle de société. que nous venons d'exposer.

Exemple Ier.

Un homme en mourant laisse sa femme enceinte: il ordonne par son testament que, si elle accouche d'un garçon, elle n'aura que le $\frac{1}{3}$ de son bien, qui se monte à 21000f, tandis que l'enfant en aura les $\frac{2}{3}$; et que, si au contraire, elle accouche d'une fille, elle aura les $\frac{2}{3}$ du bien, tandis que la fille n'en aura que le $\frac{1}{3}$; cette femme accouche à la fois d'un garçon et d'une fille: on demande quelle doit être la part des trois héritiers ?

Il est clair, d'après l'énoncé du testament, que l'intention du mourant étoit que le garçon eût le double de la mere, et que la mere eût le double de la fille: si donc on suppose 1 part pour la fille, la mere doit en avoir 2, et le fils 4; et l'on aura 7 pour la somme des parts; cette regle n'est donc que celle qu'on vient de résoudre; on aura donc la valeur

d'une part, au moyen de cette proportion........ $7:21000 :: 1:x$, ou $1:3000 : 1:x$, ou 3000f. Donc la part de la fille est de 3000f ; celle de la mere se trouvera en doublant cette somme, ce qui donnera 6000f ; enfin on aura celle du fils en doublant encore celle-ci, ce qui fera 12000 francs. L'on voit que ces trois parts remplissent toutes les conditions, puisque 1°. la somme de 3000f, 6000f et 12000f. font le bien total 21000f ; et que 2°. la part de la fille n'est que la moitié de celle de la mere, tandis que celle de la mere n'est à son tour que la moitié de celle du fils. Cette regle est appelée par quelques auteurs, regle *testamentaire*.

EXEMPLE II.

Quatre banquiers ont mis en société une certaine somme; la mise du premier est les $\frac{2}{3}$ de celle du second; celle du second est les $\frac{3}{4}$ de celle du troisieme, et celle du troisieme est les $\frac{4}{5}$ de celle du quatrieme; ils ont gagné 35000 francs; que revient-il à chacun?

On voit qu'en supposant que la mise du quatrieme soit représentée par 1, celle du troisieme vaudra les $\frac{4}{5}$ de 1, ou $\frac{4}{5}$; celle du second vaudra les $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$, ou $\frac{3}{5}$; et enfin celle du premier vaudra les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$, ou $\frac{2}{5}$; les 4 mises seront donc 1, ou $\frac{5}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$; dont la somme est $\frac{14}{5}$. On aura donc les quatre parts cherchées, au moyen de ces quatre proportions.

$$\frac{14}{5} : \frac{5}{5} :: 35000 : x$$
$$\frac{14}{5} : \frac{4}{5} :: 35000 : x$$
$$\frac{14}{5} : \frac{3}{5} :: 35000 : x$$
$$\frac{14}{5} : \frac{2}{5} :: 35000 : x$$

ou, en supprimant partout le dénominateur commun aux deux premiers termes, et divisant les antécédens par 14,

I

1	:	5	::	2500	:	ou	12500[f]	part du quatrieme.
1	:	4	::	2500	:	ou	10000	part du troisieme.
1	:	3	::	2500	:	ou	7500	part du second.
1	:	2	::	2500	:	ou	5000	part du premier.
				somme. . . .			35000[f.]	

246. Il est souvent très-utile, pour éviter les fractions, de supposer un autre nombre que l'unité : ainsi dans l'exemple précédent, où j'avois les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$, je prendrois pour la part supposée du quatrieme associé, au lieu de 1, le nombre 60, qui est tout à la fois divisible par les dénominateurs 3, 4 et 5; alors on voit que, cette part étant supposée 60, celle du troisieme sera les $\frac{4}{5}$ de 60 ou 48 ; celle du second sera les $\frac{3}{4}$ de 48 ou 36; enfin, celle du premier sera les $\frac{2}{3}$ de 36 ou 24. Les quatre parts supposées seront donc 60, 48, 36 et 24, dont la somme est 168; j'aurai donc les quatre proportions

$$168 : 60 :: 35000 : x$$
$$168 : 48 :: 35000 : x$$
$$168 : 36 :: 35000 : x$$
$$168 : 24 :: 35000 : x$$

ou en divisant par 12 les deux premiers termes, et ensuite par 14 tous les antécedens, ces quatre autres,

$$1 : 5 :: 2500 : x$$
$$1 : 4 :: 2500 : x$$
$$1 : 3 :: 2500 : x$$
$$1 : 2 :: 2500 : x$$

proportions absolument les mêmes que les quatre ci-dessus.

EXEMPLE III.

On demande quel est le nombre dont la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ et les $\frac{7}{12}$ font 85.

Supposons que ce nombre soit 1 : sa $\frac{1}{2}$, son $\frac{1}{3}$, son $\frac{1}{4}$ et ses $\frac{7}{12}$ seront $\frac{20}{12}$, ou $\frac{5}{3}$; cela posé, le nombre supposé 1 doit être au nombre cherché x comme les $\frac{5}{3}$ de 1 sont aux $\frac{5}{3}$ de x, puisque le second rapport n'est autre chose que le premier, dont on a multiplié les deux termes par le même nombre $\frac{5}{3}$; on aura donc la proportion

$$1 : x :: \tfrac{5}{3} \text{ de } 1 : \tfrac{5}{3} \text{ de } x$$

mais par l'hypothèse, les $\frac{5}{3}$ du nombre cherché x, font 85; on a donc la proportion $1 : x :: \frac{5}{3} : 85$, ou $\frac{5}{3} : 85 :: 1 : x$, ou $1 : 17 :: 3 : x$, qui vaudra donc 51. En effet

$\frac{1}{2}$ de 51 vaut. . .	$25\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$ de 51 vaut. . .	17
$\frac{1}{4}$ de 51 vaut. . .	$12\frac{3}{4}$
$\frac{7}{12}$ de 51 valent. .	$29\frac{3}{4}$
somme. . . .	85

On eût pu supposer au lieu de 1, le nombre 12, divisible à la fois par tous les dénominateurs 2, 3, 4 et 12, et alors on eût eu d'abord 20 pour la somme de la $\frac{1}{2}$, du $\frac{1}{3}$, du $\frac{1}{4}$, et des $\frac{7}{12}$ de 12, et ensuite la proportion $20 : 85 :: 12 : x$, ou $1 : 17 :: 3 : x$, comme ci-dessus. Voyons un dernier problême.

EXEMPLE IV.

Un bassin renferme 3 jets-d'eau; le premier, allant seul, rempliroit le bassin en 3 heures $\frac{1}{4}$, le second, en $2^{h.}\frac{1}{3}$, et le troisieme en $1^{h}\frac{4}{5}$; on demande, s'ils alloient tous ensemble, en combien de temps le bassin seroit rempli?

Supposons qu'il le fût en 1 heure, on voit qu'on trouvera quelle partie du bassin le premier jet-d'eau rempliroit dans ce temps, en calculant le quatrieme terme de cette proportion, où je représente par l'unité la capacité du bassin : $3^{h.}\frac{1}{4} : 1^{h} :: 1 : x$. ou $13 : 4 :: 1 : x$, qui vaut donc $\frac{4}{13}$; en opérant pareillement pour le second, on auroit $2\frac{1}{3} : 1 :: 1 : x$, ou $7 : 3 :: 1 : x$, qui donneroit $\frac{3}{7}$; pour le troisieme enfin, on auroit cette proportion $1\frac{4}{5} : 1 :: 1 : x$, ou $9 : 5 :: 1 : x$, qui vaudroit donc $\frac{5}{9}$. Donc la somme des 3 fractions $\frac{4}{13}$, $\frac{3}{7}$ et $\frac{5}{9}$, ou $\frac{1058}{819}$ est la partie du bassin que rempliroient en 1 h. les 3 jets-d'eau, s'ils alloient tous à la fois : ce qui prouve d'abord qu'il ne faut pas même 1 heure pour le remplir. Pour trouver le temps juste, on calculera le dernier terme de cette proportion $\frac{1058}{819} : 1 :: 1^{h.} : x^{h.}$, dans laquelle on voit que x vaut $\frac{819}{1058}$ d'heure. On se convaincra de la légitimité de cette solution en, observant que, puisque le premier jet-d'eau remplit les $\frac{4}{13}$ du bassin en 1 heure, en $\frac{819}{1058}$ d'heure, il doit en remplir les $\frac{4}{13}$ des $\frac{819}{1058}$, ou les $\frac{4}{1}$ de $\frac{63}{1058}$, ou $\frac{252}{1058}$; que le second doit, par une raison semblable, en remplir les $\frac{3}{7}$ des $\frac{819}{1058}$, ou les $\frac{3}{1}$ des $\frac{117}{1058}$, ou $\frac{351}{1058}$; enfin, que le troisieme doit en remplir les $\frac{5}{9}$ des $\frac{819}{1058}$, ou les $\frac{5}{1}$ des $\frac{91}{1058}$, ou $\frac{455}{1058}$; si l'on ajoute alors les trois numérateurs 252, 351 et 455, on aura 1058 ; ce qui prouve que, dans les $\frac{819}{1058}$ d'une heure, les trois jets-d'eau ont rempli les $\frac{1058}{1058}$, c'est-à-dire, la capacité juste du bassin.

Enfin, si l'on vouloit avoir la valeur de la fraction $\frac{819}{1058}$ d'heure, en minutes, secondes et fraction de seconde, on trouveroit, par les regles ordinaires, $46' 26'' \frac{812}{1058}$, ou $\frac{406}{529}$, ou $\frac{3}{4}$, à fort peu de chose près.

F I N.

Digitized by Google

PRÉFACE

DE L'AUTEUR.

Je me suis proposé de suivre dans cet ouvrage, la même méthode que dans mes Élémens de Géométrie : j'ai tâché d'y donner les regles de l'Algebre, dans un ordre que les inventeurs eussent pu suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Théorêmes. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les problêmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des problêmes utiles au commerce, comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entr'elles ; des regles d'alliage, etc. sont les problêmes que je suppose avoir occupé les premiers algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces problêmes, telle qu'on la peut trouver, sans avoir aucune teinture

de l'Algebre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution, que si la mémoire suffit à retenir tous les raisonnemens par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnemens n'est pas bien longue; et l'on voit en même-tems que, lorsqu'on s'éleve à des problêmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une maniere fort abrégée, il faut imaginer quelques signes, à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette maniere d'écrire les questions, est l'Algebre que je fais, pour ainsi dire, inventer au lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé, je ne propose d'abord que des questions numériques, parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des commençans. Après en avoir résolu plusieurs qui ne different les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, et qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois : je saisis cette occasion d'expliquer la maniere de résoudre généralement les problêmes, en employant, au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de gran-

deurs : et j'enseigne ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulieres, au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens problêmes où j'emploie des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assez compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les regles d'addition, soustraction, multiplication et division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les commençans les suivent avec peine et avec dégoût, lorsqu'on les leur enseigne dans un tems où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils operent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les commençans, et dont l'explication embarrasse le plus les maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns et des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans lesquelles on a dû en remarquer la nécessité. Je commence par enseigner à multiplier une quantité composée de plusieurs

termes positifs et négatifs par un seul terme que je suppose toujours positif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à considérer une quantité négative, comme existant seule. Cette multiplication étant expliquée, je passe à celle où le multiplicateur est aussi bien que le multiplicande composé de plusieurs termes positifs, et je fais voir facilement que cette opération n'est autre chose que la premiere répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, et que, suivant que les termes de ce multiplicateur sont positifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent, doivent être ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen, je familiarise les commençans avec la multiplication, sans que j'aie seulement besoin d'énoncer ces principes ordinaires, que *moins* par *plus* donne *moins*, *moins* par *moins*, donne *plus*, etc. qui, en présentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laissent presque toujours croire qu'il y en a dans les choses.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, et je n'aurois fait réellement que l'éluder, si je ne parlois de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités aussi entiérement négatives, opération dans laquelle on ne sauroit éviter la contradiction apparente dont je viens

de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication, après en avoir montré la nécessité au lecteur, en le conduisant à un problême où l'on est obligé de considérer des quantités négatives, indépendamment d'aucunes quantités positives dont elles soient retranchées.

Lorsque je suis parvenu, dans ce problême, au point où il s'agit de multiplier ou de diviser des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont sans doute pris les premiers analystes qui ont eu de ces opérations à faire, et qui ont voulu suivre une route entiérement sûre, je cherche une solution au problême, par laquelle je puisse éviter toute espece de multiplication ou de division de quantités négatives: par ce moyen j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnemens, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute; et je vois ce que doivent être ces produits ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la premiere solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que *moins* par *moins* donne *plus*, etc.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, et le lecteur parvient en même tems à connoître la nature des solutions négatives des problêmes; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une

Digitized by Google

solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du problême.

La premiere partie de cet ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, et de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est, par exemple, la regle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur, laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette regle est expliquée d'une maniere nouvelle, et j'y ai ajouté plusieurs réflexions applicables à des cas où la maniere ordinaire de la traiter, pourroit rebuter, pour la longueur des calculs, et ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la seconde partie, je parle des équations du second degré; un problême où il s'agit d'intérêts-d'intérêts m'amene à une de ces équations; je l'ai choisie de maniere à donner pour ses deux solutions deux nombres positifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens résolvent le même problême. J'en ai usé ainsi, dans la crainte que les commençans, qui ne regardent

pas volontiers les racines négatives comme de véritables solutions, ne crussent que le problême n'avoit réellement qu'une solution.

Cependant, afin de les accoutumer aux racines négatives, je donne ensuite un problême dans lequel il y a une de ces racines, et telle cependant qu'aucun commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant au problême que la positive.

La résolution des équations que demandent ces problêmes, et ceux de même espece qu'on peut se proposer, engagent les lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algebre, telles que les extractions des racines quarrées; la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions; etc. opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algebre, mais que mon plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations, je passe à un problême dans lequel on doit employer plusieurs équations du second degré qui contiennent chacune plusieurs inconnues, et je donne les moyens de réduire toutes ces équations à une seule qui ne renferme qu'une inconnue. Je fais voir en même tems que cette méthode n'est pas seulement propre aux équations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troisieme partie a pour objet les équations de tous les degrés prises en général. Je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coefficiens du second, du troisieme, etc. terme, ont d'être, ou la somme des racines, ou celle des produits de ces racines, etc. Je tire de ces propriétés la fameuse regle de Descartes, pour trouver toutes les racines commensurables qui sont dans une équation; et comme cette méthode engage dans des calculs excessifs à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Newton, qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension, mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode que Newton avoit supprimée, mais je fais voir par quelle route il a pu la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que M. s'Gravesande en a donnée (dans son *Specimen commentarii in arithmeticam universalem*, inséré à la fin de ses Élémens d'Algebre) et qui est la seule que je sache avoir été donnée, malgré le grand nombre de Traités d'Algebre qui ont paru depuis Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir commenté les recherches les plus élevées de Newton, avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais

ce qu'il a fait sur cette matiere, n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste, dans cette partie et dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les problêmes qui pourroient avoir conduit aux équations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir par les premiers problêmes, de quelle importance il étoit de savoir résoudre toutes sortes d'équations.

Je traite dans la quatrieme partie des équations de tous les degrés, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles se réduisent à la méthode des équations du second degré par une simple transformation. J'enseigne, par ce moyen, aux commençans, un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espece, et je leur donne une connoissance entiere, tant de l'élévation des puissances, que de l'extraction des racines.

Une regle qui est absolument nécessaire pour la résolution complette de ces équations, et qui a toujours été omise dans tous les ouvrages élémentaires, (celui de M. s'Gravesande excepté) c'est l'extraction des racines

des quantités en partie commensurables, et en partie incommensurables: Newton, à qui on doit cette regle, l'ayant donnée à son ordinaire sans démonstration, je l'ai traitée ici comme un problême; par ce moyen la découverte et la démonstration marchent toujours de concert.

La méthode de Newton s'étend aux quantités numériques, quel que soit l'exposant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré; je supplée ce qui manque à cette méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus, je fais voir que la méthode de Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions; c'est lorsque la racine d'une quantité contient des fractions, et que cette quantité elle-même n'en renferme pas. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvénient.

M. s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Newton, où se trouve cette méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, et il n'a point donné la maniere de l'appliquer aux quantités littérales de tous les degrés.

Toutes ces opérations, lorsqu'on veut les

appliquer à une puissance quelconque, supposant qu'on connoisse la formule du binome, je saisis l'occasion qu'elles me fournissent d'amener l'invention de cette fameuse formule. Je la démontre d'une maniere nouvelle, et je fais voir les différens usages qu'elle a fournis, tels que le moyen de trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, etc. ce qui peut préparer les commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquieme partie traite des équations du troisieme et quatrieme degrés qui ont tous leurs termes, c'est-à-dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des équations du troisieme degré; et je fais voir ensuite les équations particulieres, où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces équations, au défaut des racines exactes, j'enseigne à en trouver par approximation; je donne, pour y parvenir, une méthode nouvelle beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode, dès la premiere opération, j'ai la valeur de la racine cherchée à un millieme près, à la seconde à un millionieme, et ainsi de suite.

Je passe delà aux équations du quatrieme degré, et, après avoir donné leur résolution

générale, je fais voir que cette résolution, ainsi que celle des équations du second degré, a cet avantage sur la résolution des équations du troisieme, qu'une seule et même formule peut, à l'aide des signes *plus* et *moins*, exprimer toutes les racines de l'équation. Je démontre aussi, ce que les auteurs élémentaires n'ont fait que supposer, que les quatre racines d'une équation du quatrieme degre, sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires; c'est-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des équations du quatrieme degré, peuvent, ainsi que celles du second, être regardées comme composées d'une partie réelle, et d'une partie qui est la racine quarrée d'une quantité négative.

La résolution des équations du quatrieme degré, étant fondée sur celle des équations du troisieme, elle a de même que ces équations, cet inconvénient, que dans un cas on ne sauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une maniere bien simple de trouver cette approximation, en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les équations du troisieme degré.

Quant aux équations qui passent le quatrieme degré, je ne donne rien pour leur résolution en général, parce que jusqu'à pré-

sent on n'a pu y parvenir, quelques efforts qu'ayent fait les analystes. L'on est réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plupart, dans la troisieme et quatrieme Partie, à de simples approximations qui sont beaucoup plus faciles, lorsqu'on est aidé de la Géométrie : c'est pourquoi je remets à traiter de ces équations, au tems où j'enseignerai la théorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre, après ce que j'avois dit en annonçant mes Élémens d'algebre, à y trouver des applications de cette science à la Géométrie, j'ai cru cependant devoir les réserver pour un autre ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un Traité entier de pure Algebre, c'étoit offrir aux commençans les moyens de s'y fortifier davantage, et qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie, que lorsque les opérations analytiques ne leur coûteroient plus. J'espere que les principes qu'ils trouveront dans cet ouvrage, les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste, je ne suppose pour l'intelligence de ce Traité, que les opérations principales de l'arithmétique, parmi lesquelles je compte la regle de trois: ceux qui auront lu mes Élémens de Géométrie, posséderont la théorie des proportions, autant qu'il est nécessaire

pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même livre, tant les Élémens d'Arithmétique, que ceux d'Algebre, et je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Élémens de Géométrie; mais l'ordre que j'ai suivi m'a paru demander de traiter séparément ces deux sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmétique familiere à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algebre.

Digitized by Google

ÉLÉMENS
D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problémes par les équations, et de la résolution des équations du premier degré.

PARMI les différens problêmes dont les premiers mathématiciens qui ont eu le nom d'algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la science qu'on nomme Algebre ou Analyse.

I.

Partager une somme, par exemple, 890^{tt} *à trois personnes, en sorte que la premiere ait* 180^{tt} *de plus que la seconde, et la seconde,* 115^{tt} *de plus que la troisieme.*

Exemple d'un problême semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pu se proposer.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme qui, sans aucune teinture de l'Algebre, sera parvenu à résoudre ce problême.

Digitized by Google

Solution de ce problême, telle qu'on la pourroittrouver sans algebre.

Il est évident que si on connoisoit une des trois parts, on connoîtroit aussi-tôt les deux autres. Supposons, par exemple, qu'on con noisse la troisieme qui est la plus petite, il faudra y ajouter 115#, et l'on aura la valeur de la seconde; ensuite pour avoir la premiere, il faudra ajouter 180# à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoutoit 180#, plus 115# ou 295# à la troisieme.

Quelle que soit la troisieme part, nous savons donc que cette part, plus elle-même avec 115#, plus encore elle-même avec 295#, doit faire une somme égale à 890#.

Delà, il suit que le triple de la plus petite part, plus 115#, plus 295# ou en une fois plus 410#, est égal à 890#.

Or, si le triple de la part qu'on cherche plus 410# est égal à 890#, il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que 890# de 410#. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480#. Donc la plus petite part est égale à 160#.

La seconde sera par conséquent de 275#, et la premiere ou la plus grande de 455#.

C'est vraisemblablement ainsi que les premiers algébristes ont raisonné, quand ils se sont proposés de pareilles questions : sans doute qu'à mesure qu'ils avançoient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur mémoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils étoient ; et lorsque les

les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi se rebuter; mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une maniere plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels, quelqu'avancés qu'ils fussent dans la solution d'un problême, ils pussent voir d'un coup-d'œil ce qu'ils avoient fait et ce qui leur restoit à faire. Or l'espece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algebre.

II.

Méthode algébrique d'exprimer le problême précédent.

Pour mieux donner les principes de cette science, nous allons reprendre la même question, nous écrirons en langage ordinaire les raisonnemens que l'Algébriste fait pour résoudre son problême, et en caracteres algébriques, ce qu'il lui suffit d'écrire pour aider sa mémoire.

La plus petite ou la troisieme part, quelle qu'elle soit, je l'exprime par une seule lettre qui sera par exemple.................... x

Le signe + indique l'addition.

La seconde sera par conséquent la premiere plus 115, ce que j'écris ainsi $x+115$, choisissant le signe + qu'on prononce *plus*, pour désigner l'addition des deux quantités entre lesquelles on le place.

Quant à la premiere part ou la plus grande, comme elle surpasse la seconde de 180, elle sera exprimée par.......... $x+115+180$.

Ajoutant ces trois parts, on aura.........
...............$3x + 115 + 115 + 180$,
ou en réduisant................$3x + 410$.

Le signe = marque l'égalité.

Mais cette somme des trois parts doit égaler 890₶, ce qui s'exprime ainsi $3x + 410 = 890$, employant le caractere = qui se prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre lesquelles on le place.

Une équation est l'égalité de deux quantités.

On résout une équation, lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

La question, par ce calcul, est donc changée en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410, fasse 890. Trouver la résolution de semblables questions, c'est ce qu'on appelle résoudre une équation, l'équation dans ce cas-ci est $3x + 410 = 890$: on l'appelle ainsi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités : résoudre cette équation, c'est trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition, que son triple plus 410 fasse 890.

III.

Résolution de l'équation qui exprime le problème précédent.

Pour résoudre cette équation, voici comment l'Algébriste raisonne, et comment il écrit ses raisonnemens. L'équation à résoudre....
......................$3x + 410 = 890$,
m'apprend qu'il faut ajouter.......410 à $3x$ pour faire la somme de 890; donc $3x$ sont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainsi..
.....................$3x = 890 - 410$.

Le caractere — indique la soustraction.

Prenant le caractere — qui se prononce *moins* pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précede doit être retranchée de celle qu'il suit.

Digitized by Google

De cette nouvelle équation $3x = 890 - 410$, l'on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre équation $3\,x = 480$.

Mais si trois x valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160, ce que j'écris ainsi, $x = \frac{480}{3} = 160$, et la question est résolue, puisqu'il suffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

I V.

Autre solution du problême précédent.

Si on avoit voulu résoudre la question en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pu de même.

Voici comment on s'y seroit pris.

Soit cette premiere part........y.

La seconde ayant 180 de moins, sera $y - 180$,

Et la troisieme ayant 115 de moins que la seconde sera ....$y - 180 - 115$.

Or la somme de ces trois quantités est.... ....$3\,y - 180 - 180 - 115$, c'est-à-dire........$3\,y - 475$.

Mais cette somme doit égaler 890.

On a donc l'équation $3\,y - 475 = 890$ qui apprend que $3\,y$ surpassent 890 de 475, puisqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3\,y = 890 + 475$ ou $3\,y = 1365$.

Donc y ou la plus grande part$=455$ comme ci-dessus.

Si dans le problême il avoit fallu partager une somme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, et que les différences eussent été d'au-

tres nombres que ceux dont on s'est servi, il est évident qu'on l'auroit résolu de la même maniere. Supposons, par exemple, que le problême eût été énoncé ainsi :

Autre exemple du problême précédent.

Partager 9600# à quatre personnes, en sorte que la premiere ait 300# de plus que la seconde, la seconde 250# de plus que la troisieme, et la troisieme 200# de plus que la quatrieme.

On auroit raisonné de la maniere suivante :
En nommant la quatrieme part x.
La troisieme sera $x + 200$.
La seconde.... $x + 200 + 250$.
La premiere.... $x + 200 + 250 + 300$.

Or la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'équation.

$$4x + 1400 = 9600.$$

Pour résoudre cette équation, je remarque, comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qui reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi........... $4x = 9600 - 1400$,
ou $4x = 8200$.

Mais si $4x$ sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire que $x = \frac{8200}{4} = 2050$: la plus petite part x étant connue, les autres se trouvent tout de suite, la troisieme $= 2250$, la seconde $= 2500$, et la premiere $= 2800$.

VI.

Le problême pourroit être encore plus varié, et dépendre toujours des mêmes principes; supposons, par exemple, qu'il fût énoncé ainsi :

Partager 5500ᵗᵗ *en deux parties, de maniere que la premiere ait un tiers de plus que la seconde, plus* 180ᵗᵗ.

Troisieme exemple du problême précédent.

Voici comment on le résoudroit.

Soit la seconde part.... x.

On aura pour la premiere $x + \frac{1}{3}x + 180$.

Or comme leur somme doit égaler 5500, on a donc l'équation $2x + \frac{1}{3}x + 180 = 5500$. Pour résoudre cette équation, je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{1}{3}x$, ce qui me donne $\frac{7}{3}x$ parce que deux entiers valent six tiers, et que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'équation précédente se réduit à..... $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$, qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$ ou.................... $\frac{7x}{3} = 5320$.

Or si le tiers de $7x$ vaut 5320, les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi........... $7x = 5320 \times 3$. Employant le signe $\times$ qui se prononce *multiplié par*, pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare.

Le signe × indique la multiplication.

Ensuite, au lieu de $7x = 5320 \times 3$, il suffit

Digitized by Google

d'écrire $7x = 15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle équation, on a $x = \frac{15960}{7} = 2280$, valeur de la seconde part.

La premiere part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité 2280, son tiers 760, et de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, et l'on aura 3220 pour la premiere part.

Les commençans pourront s'exercer à varier encore davantage l'énoncé du problême précédent, et à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront; ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre problême qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

VII.

Nouveau problême de même nature que le précédent.

Trois marchands font une société, le premier fournit 17000ᵗᵗ, *le second* 13000ᵗᵗ, *le troisieme* 10000ᵗᵗ; *comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que* 10000ᵗᵗ *se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres* 3 *pour* 100 *de tout le gain qui se fera : il arrive que ce gain monte à* 100000ᵗᵗ : *on demande ce qu'il faut qu'ils ayent chacun.*

Soit la part du premier,.............. x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17, doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire, seulement................. $\frac{13}{17}x$.

Le troisieme supposant qu'il n'eût qu'à raison de sa mise, auroit les dix 17[mes] du premier; mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur le tout, c'est-à-dire 3000#; sa part sera...... $\frac{10}{17}x + 3000$.

Et comme la somme de ces trois parts doit être 100000#, on aura....... $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x + 3000 = 100000$

ou $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x = 97000$

Pour dégager l'inconnue de cette équation, soit considéré que

$x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ou $\frac{17}{17}x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$

ne signifie autre chose que $\frac{40}{17}x$; on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40\,x = 97000 \times 17$ ou $40\,x = 1649000$, ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée, celle du second exprimée par $\frac{13}{17}x$, sera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'est-à-dire 31525; celle du troisieme, exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$, sera

$$\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250.$$

VIII.

Par ces deux problêmes, les lecteurs entrevoient ce que c'est que l'Algebre, et ils apprennent qu'en général la solution d'un problême est composée de deux parties; dans la premiere, on nomme par une lettre comme La solution analytique d'un problême aux deux parties

x ou *y*, etc. la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui étant connue, détermineroit les autres : on tâche ensuite d'arriver à une équation où l'inconnue se trouve, ce qui se fait en exprimant de deux manieres différentes une même quantité.

Dans la premiere on exprime ce problême par une équation.

Dans la seconde partie, il s'agit de dégager l'inconnue dans l'équation.

Dans la seconde on résout cette équation.

La premiere de ces deux parties est difficile à réduire en préceptes clairs pour les commençans ; ce ne peut être que par des exemples qu'on la fasse bien sentir.

Quant à la seconde, on la peut beaucoup plus aisément expliquer d'une maniere générale.

IX

Les équations du premier degré sont celles où l'inconnue n'est multipliée ou divisée que par des quantités connues.

Dans les questions que nous venons de résoudre, on est arrivé à des équations dans lesquelles l'inconnue ne se trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la division de nombres connus ; on appelle ces sortes d'équations, équations du premier degré, tels sont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{5}x + 30$, etc. Et les problêmes qui conduisent à ces équations sont nommés des problêmes du premier degré.

On les appelle ainsi pour les distinguer de ceux dans lesquels l'inconnue seroit ou quarrée, ou cubée (1), etc. qu'on dit être aussi bien

(1) On doit avoir vu en arithmétique qu'un nombre est

que leurs équations, du second degré si l'inconnue est quarrée, du troisieme si l'inconnue est cubée, etc.

Qu'on demande, par exemple, un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, donne 65, le problême qu'il faudroit résoudre alors seroit du second degré. Et l'équation $3x + xx = 65$ (dans laquelle xx désigne le quarré de x) qui exprimeroit les conditions de ce problême, seroit une équation du second degré.

On n'a pu parvenir à la résolution de ces équations qu'après s'être exercé long-tems aux équations du premier degré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver, reprenons d'abord l'équation $4x - 1400 = 9600$, traitée art. V. laquelle est composée des trois termes $4x$, 1400, 9600, (on appelle ainsi toutes les parties d'une équation, séparées les unes des autres par les signes + ou —) et remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x = 9600 + 1400$, nous pourrons,

Les termes d'une équation sont ses parties séparées par les signes + ou —.

quarré ou cubé, suivant qu'il est multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarre 7, par exemple, lorsque, en le multipliant par lui-même, on en forme 49; de même on le cube lorsque le multipliant deux fois par lui-même on en forme 343.

dans toutes sortes d'équations, prendre quelque terme que ce soit, précédé du signe $+$, et le passer de l'autre côté du signe $=$ en lui donnant le signe $-$. Qu'on ait, par exemple,

$$50 + \frac{10}{3}x = 5x + 30,$$

il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en $-$ de l'autre côté, et écrire ainsi l'équation $50 = 5x + 30 - \frac{10}{3}x$; car on peut dire, comme dans l'article V, que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x + 30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x + 30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$, c'est-à-dire, qu'il soit égal à $5x + 30 - \frac{10}{3}x$.

De la même maniere qu'on a vu, art. III, que l'équation $3y - 475 = 890$ se changeoit en $3y = 890 + 475$, on verra qu'en général les termes qui sont en $-$ d'un côté du signe d'égalité, peuvent être passés en $+$ de l'autre. Qu'on ait, par exemple, $32 - 6x = 9x + 119$, on en tirera $32 = 6x + 9x + 119$. Car si 32 doit être diminué de $6x$ pour égaler $9x + 119$, il faut qu'il soit plus grand que $6x$ de cette quantité, c'est-à-dire, qu'il soit égal à $6x + 9x + 119$.

XI.

Tout terme peut être passé d'un côté de l'équation à l'autre, en changeant le signe.

Voilà donc un principe général pour toutes les équations, c'est que *les termes que l'on voudra pourront être passés d'un côté de l'équation à l'autre, en observant de changer leurs signes*. Or, ce principe est d'une utilité infinie en ce qu'il épargne beaucoup de raisonnemens.

XII.

Par son moyen, on peut toujours changer une équation en une autre, où l'on ait d'un côté du signe =, c'est-à-dire, dans l'un des membres de l'équation, les termes affectés de x et de l'autre côté du signe =, c'est-à-dire, dans l'autre membre de l'équation, tout ce qui est entiérement connu.

On appelle membres d'une équation, ses deux parties séparées par le signe =.

Que l'on ait, par exemple, l'équation

$$8x + 30 = \frac{5}{3}x + 250;$$

j'en tire

$$8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30:$$

que l'on ait $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$ on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, et ainsi des autres.

XIII.

Lorsqu'après les transpositions nécessaires, on aura fait passer tous les termes affectés de x d'un côté, et les termes connus de l'autre; ce qui se présente le plus naturellement, c'est de réduire chacun des deux membres de l'équation à sa plus simple expression. Qu'on ait, par exemple $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$, on en tire aussi-tôt $\frac{19}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, et en retranchant aussi $\frac{5}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui est égal.

Qu'on ait l'équation $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, on la change en $\frac{13}{12}x = 190$, à cause qu'en réduisant $\frac{7}{3}x$ et $\frac{5}{4}x$ au même dénominateur, on a $\frac{28}{12}x$ et $\frac{15}{12}x$ dont la différence est $\frac{13}{12}x$, et qu'en retranchant 60 de 250, il reste 190.

XIV.

Par de semblables réductions qui sont toujours faciles à ceux qui savent l'arithmétique, on changera toutes les équations du premier degré, quelque composées qu'elles soient, en d'autres qui n'auront que deux termes, dont l'un sera composé d'un certain nombre d'x entier ou rompu, et l'autre un terme entiérement connu, telles que sont les équations

$$4x = 8200, \quad \tfrac{7}{3}x = 5320,$$

résolues dans les articles V et VI.

Rappellons-nous maintenant ce que nous avons dit sur ces équations, et nous en tirerons des principes généraux pour toutes les autres.

Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.

De l'équation $4x = 8200$ nous avons tiré $x = \frac{8200}{4}$, parce qu'il s'ensuivoit de ce que $4x$ valoient 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que le quart de cette somme ; de ce raisonnement et de ceux que l'on formeroit pareillement pour les autres nombres d'x on tire ce principe général, qu'*on peut ôter le multiplicateur qui affecte l'inconnue dans un des membres de l'équation, en le faisant servir de diviseur à l'autre membre.*

XV.

Maniere de faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue.

De l'équation $\frac{7}{3}x = 5320$, nous avons tiré $7x = 3 \times 5320$, en remarquant que si le tiers de $7x$ vaut 5320, $7x$ entiers doivent valoir trois fois davantage. Delà on forme ce principe général, que *pour faire disparoître*

le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'équation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre.

XV

Avec ces regles on est en état de résoudre toutes sortes d'équations du premier degré. Pour exercer les commençans, voici quelques exemples.

Exemples d'équations du premier degré, résolues par les principes précédens.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en

$$\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82,$$

ou en réduisant $\frac{6x}{5} - \frac{2}{3}x = 8$, ou

$$\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8,$$

ou $\frac{8}{15}x = 8$, ou $8x = 8 \times 15$, ou en dernier lieu $x = 15$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$, ou

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19,$$

ou $\frac{1}{21}x = 19$, ou $x = 399$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui, en réduisant d'abord $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{4}$ au même dénominateur devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, et qui, en réduisant $\frac{7}{5}$ et $\frac{1}{36}$ au même dénominateur, devient ensuite $\frac{247}{180}x = 100$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

XVII.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même dénominateur, on peut faire disparoître l'un après l'autre, tous les diviseurs de l'équation donnée, au moyen de la méthode

suivante, qui a dû être bientôt imaginée par ceux qui, les premiers, ont manié ces sortes d'équations.

Maniere de faire évanouir les fractions d'une équation.

Soit repris l'exemple précédent

$$\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100,$$

il est clair que si on multiplie les deux membres de cette équation par 9, les deux produits seront les mêmes; car des quantités égales, multipliées par le même nombre, doivent donner le même produit; on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se réduit à

$$2x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900,$$

dans laquelle le diviseur 9 a disparu, et l'on voit bien que cela devoit arriver nécessairement; car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce soit, multipliés par 9, doivent donner deux entiers de cette même quantité. Pour faire disparoître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'équation par 4, en observant seulement pour le terme $\frac{9}{4}x$ que la multiplication par 4 se fera en ôtant le 4 qui est dessous. Ainsi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$, ou $\frac{252}{5}x - x = 3600$, qui, en multipliant les deux membres par 5, deviendra $252x - 5x = 18000$, ou $247x = 18000$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

Le principe général qu'on tire de-là, c'est que *pour faire disparoître un diviseur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par ce diviseur, et l'ôter du terme où il est.*

XVIII.

On peut trouver une maniere de faire disparoître tous les diviseurs à-la-fois, en remarquant que si on multiplie tous les termes par un même nombre qui puisse se diviser par chacun de ces diviseurs, chaque terme se réduira. Multiplions, par exemple, l'équation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ par 180 qui peut se diviser par 9, par 4 et par 5, on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$, ou $40x - 45x + 252x = 18000$, ou Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois

$$247x = 18000.$$

Or pour trouver ce nombre qui puisse se diviser par tous les diviseurs, il ne faut que multiplier successivement ces diviseurs, les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple,

$$\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$$

dont on veuille faire évanouir les diviseurs, je multiplie d'abord 3 par 5, et je multiplie ensuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui est divisible par 3, 5, 7 : ce nombre trouvé, je m'en sers pour multiplier toute l'équation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$, ou $245x + 21x = 16800 - 30x$.

Pour abréger encore cette opération, au lieu de former le produit 105 des trois diviseurs, on se contentera d'écrire ainsi ce produit $3 \times 5 \times 7$, la multiplication donne alors

$$\frac{7.3.5.7}{3}x + \frac{7.3.5}{5}x = 160.3.5.7 - \frac{7.5.3.2}{7}x$$

dans laquelle on voit tout de suite que le nom-

bre 3 doit s'en aller du numérateur de la premiere fraction, puisque la division par 3 doit être détruite en faisant la multiplication par 3; il en est de même du 5 et du 7, qui sont à la fois aux numérateurs et aux diviseurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'équation

$$7.5.7x + 7.3x = 160.3.5.7 - 2.3.5.x$$

qui, en faisant les multiplications indiquées par les signes ×, donne

$$245x + 21x = 16800 - 30x$$

délivrée des fractions.

XIX.

Pour suivre le plus vraisemblablement qu'il est possible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la maniere de mettre les problêmes en équations. La résolution des équations a pu, indépendamment des problêmes auxquels elles ont rapport, occuper les Algébristes lorsque cette science a été avancée à un certain point; mais il est à présumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les équations qu'à l'occasion des problêmes dont elles étoient, pour ainsi dire, le dénouement. D'ailleurs il se trouve quelquefois dans les équations des complications dont on ne se seroit pas douté, si la nature des problêmes qu'on cherchoit ne les avoit amenées.

Nous

Nous ne pouvons rien dire ici de plus clair, sur la maniere générale de mettre les problêmes en équations, que ce que nous avons dit, article VIII ; mais nous allons donner plusieurs exemples qui accoutumeront les commençans à cette recherche.

Pour payer un certain nombre d'ouvriers sur le pied de 3 # chacun, il manque 8 # à un homme qui les fait travailler ; mais en ne leur donnant à chacun que 2 #, il lui reste 3 # : on demande combien cet homme a d'argent. Troisieme problême.

Soit x le nombre de livres que possede cet homme : donc $x + 8$ est la somme pui peut satisfaire tous les ouvriers sur le pied de 3 # ; et comme le nombre des ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette somme, il sera exprimé par le tiers de $x + 8$, ce qu'on écrira ainsi $\frac{x+8}{3}$; car en Algébre comme en arithmétique, une barre horisontale indique toujours la division de la quantité supérieure par l'inférieure.

On emploie une barre en Algebre comme en arithmétique pour indiquer la division.

De plus, puisqu'il reste 3 #, quand on ne donne que 2 # à chaque ouvrier ; $x - 3$ est donc la somme suffisante pour payer tous ces ouvriers, à raison de 2 # chacun. Donc $\frac{x-3}{2}$ peut exprimer le nombre d'ouvriers : mais puisque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles soient égales ; le pro-

blême est donc réduit à la résolution de l'équation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$.

Pour la résoudre, nous commencerons par faire disparoître le diviseur 2 du membre $\frac{x-3}{2}$ de cette équation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'équation en $x - 3 = \frac{2x+16}{3}$; car il est évident que le double de $\frac{x-3}{2}$ est $x - 3$, et que le double $\frac{x+8}{3}$ sera $\frac{2x+16}{3}$ par la même raison que $2x + 16$ est le double de $x + 8$. On fera ensuite évanouir le diviseur 3 de l'équation $\frac{2x+16}{3} = x - 3$, en multipliant le second membre par 3 et en l'ôtant du premier, ce qui donnera $2x + 16 = 3x - 9$, ou $x = 25$.

Si on veut savoir à présent combien il y a d'ouvriers, il faut prendre une des deux expressions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trouvées pour ce nombre, $\frac{x-3}{2}$ par exemple. Puisqu'on sait maintenant que $x = 25$, $x - 3$ sera donc 22, et partant $\frac{x-3}{2}$ sera $\frac{22}{2} = 11$, nombre d'ouvriers demandé.

XX.

Il est bon de remarquer à propos de l'équation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne seroit pas permis pour y appliquer la regle de l'article XI, de changer de côté et de signe les quantités -3 et $+8$, et d'écrire ainsi l'équation $\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$, parce que

Digitized by Google

le nombre — 3 n'est pas proprement un terme du premier membre, mais seulement un terme de son dividende $x - 3$, la quantité $\frac{x-3}{2}$ n'étant réellement qu'un seul terme de l'équation, ainsi que $\frac{x+8}{3}$. Pour appliquer donc la regle de l'art. XI, il faudroit commencer par prendre, ainsi qu'il est indiqué par le nombre 2 qui est sous la premiere barre, la moitié de $x - 3$; ce qui donneroit $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; ensuite il faudroit prendre, à cause du 3 qui est sous l'autre barre, le tiers de $x + 8$ qui seroit $\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$: égalant alors ces deux quantités, on auroit l'équation $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$, dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

XXI.

Le problême précédent pourroit encore être résolu de la maniere suivante.

Que y exprime le nombre d'ouvriers, $3y$ sera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 # chacun. Mais il manque 8 # pour les satisfaire à ce prix : donc $3y - 8$ est l'argent que possede celui qui les doit payer. *Autre solution du même problême.*

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces ouvriers à raison de 2 #, et il resteroit en ce cas 3 #. Donc $2y + 3$ est une autre expression de l'argent que possede celui qui les doit payer.

Il faut donc égaler les deux quantités $2y + 3$ et $3y - 8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'équation $2y + 3 = 3y - 8$ pour

avoir la valeur de y. Cette équation étant résolue par les principes précédens, ce qui est fort facile, on aura 11 pour y, c'est-à-dire pour le nombre d'ouvriers demandé.

XXII

Quatrieme problème.

Un courier est parti d'un lieu, il y a 9 heures et fait 5 lieues en 2 heures: on envoie un autre courier après lui, dont la vitesse est telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures; il s'agit de savoir où le second courier attrapera le premier.

Soit x le chemin que le second courier fera avant d'avoir attrapé le premier; il est évident que ce chemin doit être égal à celui que le premier courier avoit fait pendant ses 9 heures d'avance, plus au chemin que le premier courier fait pendant le tems que marche le second courier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier courier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion (1) ou regle de trois.

Comme 2 heures sont à 5 lieues, ainsi 9 heures sont à un quatrieme terme, qui suivant les regles connues en arithmétique, se trou-

(1) Je suppose ici, ou qu'on ait lu dans mes Elémens de Géométrie les articles IX et X, etc. de la seconde Partie, dans lesquels on traite des proportions, ou qu'au moins on possède bien la regle de trois expliquée dans les livres d'arithmétique.

vera en multipliant le second terme 5 de la proportion par le troisieme 9, et en divisant leur produit par le premier 2; et qui sera par conséquent $\frac{45}{2}$, nombre de lieues faites par le premier courier pendant les 9 heures.

Mais, comme en Algebre, on veut toujours écrire ses opérations le plus briévement qu'il est possible; voici comment on dénote cette proportion : Manieredont on exprime les proportions en Algebre.

$$2^{\text{heures}} : 5^{\text{lieues}} = 9^{\text{heures}} : \tfrac{45}{2}\ \text{lieues}$$

Les signes : servant, l'un à comparer 2 à 5, et l'autre 9 à $\frac{45}{2}$, et le signe = servant à marquer l'égalité qui doit être entre le rapport de 2 à 5 et celui de 9 à $\frac{45}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même courier fera, pendant le tems que le second courier fera le chemin x, on cherchera, premierement, le tems qu'il faut au second courier pour faire le chemin x, ce qui se trouvera par cette proportion;

$$11^{\text{lieues}} : 3^{\text{heures}} = x^{\text{lieues}} : \tfrac{3x}{11}\ \text{heures}$$

par laquelle, sans s'embarrasser du nombre de lieues contenues dans x, on apprend qu'il suffit de multiplier ce nombre par 3 et de le diviser par 11, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second courier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{11}x$ est connu, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion,

$$2^{\text{heures}} : 5^{\text{lieues}} = \tfrac{3}{11}x^{\text{heures}} : \tfrac{15}{22}x^{\text{lieues}}$$

dont le quatrieme terme $\frac{15}{22}x$ exprime le che-

min du premier courier, pendant le tems $\frac{3}{11}x$, c'est-à-dire, avant d'être attrapé.

Par ce moyen, on a la même quantité exprimée de deux façons différentes ; car le chemin du second courier a premièrement pour expression x ; en second lieu, il est la somme des $\frac{45}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier courier sur lui, et des $\frac{15}{22}x$ que ce même premier courier devoit avoir fait, jusqu'à ce qu'il fût attrapé. Égalant donc ces deux expressions, on aura l'équation $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$ qui donne par les regles précédentes $x = 70 + \frac{5}{7}$.

XXIII.

Si le premier courier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plutôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la question, quoique plus compliquée, seroit aisément réduite aux mêmes principes.

Que le premier courier, par exemple, allant en Espagne, soit parti d'Orléans le lundi à 8 heures du soir, en faisant 7 lieues en 3 heures, et que le second courier, allant après le premier, soit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, supposé à 34 lieues d'Orléans, en faisant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour résoudre cette question, il faut prendre la différence de 8 heures du soir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures ; et

comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion :

$$3^{\text{heures}} : 7^{\text{lieues}} = 14^{\text{heures}} : \tfrac{98}{3}\ ^{\text{lieues}}$$

Lesquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance donneront $34 + \frac{98}{3}$ ou $\frac{200}{3}$ lieues pour la distance de Paris, où étoit le premier courier, lorsque le second est parti. Ensuite on fera, comme ci-dessus, cette proportion ;

$$13^{\text{ lieues}} : 4^{\text{ heures}} = x^{\text{ lieues}} : \tfrac{4}{13}\, x^{\text{ heures}}$$

nombre d'heures nécessaires au second courier pour faire le chemin x.

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier courier aura fait un chemin qu'on trouvera ainsi :

$$3^{\text{ heures}} : 7^{\text{ lieues}} = \tfrac{4}{13}\, x^{\text{ heures}} : \tfrac{28}{39}\, x^{\text{ lieues}}$$

L'on aura donc l'équation $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ d'où l'on tire par les regles expliquées ci-dessus, $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du second courier, lorsqu'il aura attrapé le premier.

XXIV.

Lorsque les premiers Algébristes ont eu trouvé la solution de quelque question qui les intéressoit, ils n'ont guères manqué d'en faire différentes applications, en variant les nombres donnés dans ces questions. Par exemple, ils auront répété plusieurs fois la question précédente, en changeant les rapports des vîtesses des couriers, et la distance entre leurs départs. Dans ces différentes applications, ils ont senti qu'il y avoit une partie de l'opération qu'on répétoit à chaque exemple particulier du même

problême, et qui pouvoit se faire une fois pour toutes, en cherchant quelque solution où l'on ne se restreignît point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fût générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce sujet, nous allons reprendre le problême précédent, et le plus généralement qu'il nous sera possible.

Soit exprimée la distance qui est entre les deux couriers par la lettre.............. a on fera de cet a le nombre de lieues qu'on voudra, lorsque la question sera poussée jusqu'à la fin.

Solution du problême précédent, très généralement.

Soit exprimé ensuite le nombre d'heures dont le départ du premier courier a précédé celui du second par la lettre................. b

Que la vîtesse du premier courier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues........... c pendant le nombre d'heures.............. d

Que la vîtesse du second courier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues........... e dans le nombre d'heures................ f

Soit enfin, comme dans la solution particuliere, le chemin que le second courier doit faire pour joindre le premier............ x

On emploie les premieres lettres de l'alphabet, pour exprimer ce que l'on connoit, et les dernieres pour ce qu'on ne connoit pas.

C'est une attention qu'on a communément dans l'Algebre de prendre les premieres lettres a, b, c, etc. de l'alphabet, pour exprimer les quantités connues, et les dernieres s, t, u, x, etc. pour celles qu'on cherche.

Pour trouver présentement, à l'exemple de

la méthode qu'on a suivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier courier pendant le nombre d'heures b, il faudra chercher le quatrieme terme d'une proportion, dont le premier terme soit le nombre d'heures d, le second le nombre de lieues c, le troisieme le nombre d'heures b, et il est clair que cette opération se fera, comme dans toutes les autres regles de trois, en multipliant le second et le troisieme terme, l'un par l'autre, et en divisant leur produit par le premier terme.

Quant à la maniere d'exprimer le produit de ces termes qui ne sont plus comme ci-dessus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques; ce qu'on a trouvé de plus simple, c'est de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multiplier; à l'égard de la division, nous avons déjà vu qu'en Algebre, comme en arithmétique, on mettoit une barre horisontale entre les quantités qu'on veut diviser.

Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles, sont censées se multiplier.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainsi $d : c = b : \frac{bc}{d}$

Ayant donc $\frac{bc}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier courier a fait avant que le second soit parti, si on ajoute à ce chemin la distance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier, au moment du départ du second . . . . $a + \frac{bc}{d}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le premier courier fait pendant que l'autre court après lui et qu'il parcourt x ; commençons, ainsi que ci-dessus, par trouver le tems que le second courier met à parcourir l'espace x, ce qui se fera par le moyen d'une proportion $e : f = x : \frac{fx}{e}$, dont le premier terme sera le nombre de lieues e ; le second, le nombre d'heures f ; le troisieme, le nombre de lieues x, et le quatrieme $\frac{fx}{e}$ le tems cherché.

Or, quel que soit le nombre d'heures $\frac{fx}{e}$ qu'ait couru le second courier pour attraper le premier, on sait que si on fait une proportion dont les trois premiers termes soient, 1°. le nombre d'heures d ; 2°. le nombre de lieues c ; 3°. le nombre précédent $\frac{fx}{e}$, le quatrieme terme sera le chemin que le premier courier a fait dans le tems que le second a parcouru x.

Cette proportion s'écrira ainsi $d : c = \frac{fx}{e} \cdot c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$ nombre de lieues faites par le premier courier, pendant que le second parcourt x.

Mais le chemin du premier courier ajouté avec le chemin $a + \frac{bc}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit égaler le chemin du second.

On a donc l'équation

$$x = a + \frac{bc}{d} + c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}.$$

Si on se ressouvient des opérations des fractions, on doit savoir que pour multiplier une fraction comme $\frac{6}{3}$ par 4, il faut multiplier le numérateur (1) et écrire $\frac{6\times4}{3}$ ou $\frac{24}{3}$. De même

---

(1) On doit avoir vu dans l'arithmétique, que le numérateur d'une fraction est le nombre placé au-dessus de la barre, et qui sert de dividende; de même qu'on appelle dénominateur, le nombre qui est au-dessous de la barre, et qui sert de diviseur. Les opérations d'arithmétique, que je suppose ici, et dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, sont expliquées assez clairement dans plusieurs livres. Pour éviter cependant aux lecteurs la peine d'y recourir, je vais en peu de mots rappeler ces opérations et les raisons sur lesquelles elles sont fondées.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8, on multiplie le numérateur 5 par 8, et l'on écrit le même diviseur sous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$: la raison en est claire; car 8 fois 5 septiemes doivent faire 40 septiemes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviser $\frac{3}{5}$ par 4, il faut écrire sous le numérateur le produit 20 de 4 par le dénominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{20}$. La raison en est que 1 cinquieme devenant 1 vingtieme, lorsqu'on le divise par 4, 3 cinquiemes doivent devenir 3 vingtiemes par la même division.

Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{8}{3}$ on multiplie les numérateurs 5 et 8, et on divise leur produit 40 par le produit 21 des dénominateurs 3 et 7 ce qui donne $\frac{40}{21}$. Cette opération est fondée sur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{5}{7}$; mais 8 par $\frac{5}{7}$ a donné $\frac{40}{7}$: donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit donner le tiers de $\frac{40}{7}$, c'est-à-dire $\frac{40}{21}$.

Enfin, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{11}$, il faut multiplier le numérateur 3 de la premiere fraction par le dénominateur 11 de la seconde, et diviser leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5 de la premiere fraction et du numérateur 4 de la seconde, ce qui donne $\frac{33}{20}$. Opération dont on voit la raison, en remarquant que $\frac{3}{5}$ divisés par 4 donneroient $\frac{3}{20}$, et que $\frac{3}{5}$ divisés par $\frac{4}{11}$ qui sont 11 fois plus petits que 4, doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'est-à-diro $\frac{33}{20}$.

pour multiplier $\frac{fx}{e}$ par c, il faut multiplier c par fx et laisser le diviseur e, ce qui donne $\frac{cfx}{e}$ pour $c \times \frac{fx}{e}$. On sait de plus que quand on divise une fraction comme $\frac{5}{3}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{5}{3\times 6}$ ou $\frac{5}{18}$. De même pour diviser la fraction $\frac{cfx}{e}$ par d, il faut écrire $\frac{cfx}{de}$.

Ainsi ayant changé l'expression précédente $c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$ en $\frac{cfx}{de}$; l'équation qu'on doit résoudre est $x = a + \frac{be}{d} + \frac{cfx}{de}$. Opération qui demande qu'on commence, ainsi qu'on l'a enseigné art. XVIII, par multiplier tous les termes excepté le dernier, par le diviseur de afin de l'ôter de ce terme.

Nous aurons par cette opération

$$dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$$

ou $dex = ade + bce + cfx$, à cause que $\frac{bcde}{d}$ est la même chose que bce, puisque la quantité bce reste la même, lorsqu'on la multiplie et qu'on la divise par d.

Passant le terme cfx dans le premier membre, on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette équation, nous remarquerons que si nous connoissions les nombres de, et cf qui expriment ce que contiennent d'x les termes dex, et cfx, nous

retrancherions le second du premier, et que le reste qui exprimeroit la quantité d'x contenue dans le premier membre de l'équation, serviroit de diviseur au second membre, pour avoir la valeur de x. Or, sans connoître les nombres de et cf, il est clair que $de - cf$ exprime leur différence, et par conséquent la quantité d'x que contient le premier membre de l'équation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en divisant le second membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$; et c'est-là la solution générale du problême précédent; car qu'on sache à présent ce que c'est que a, b, c, d, e, f, on n'aura plus qu'à en faire l'usage indiqué par cette valeur générale de x, c'est-à-dire, multiplier successivement a, d, e, l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant successivement b, c, e, et diviser la somme de ces deux produits, par le nombre qui est la différence du produit de c par f au produit de d par e; et l'on aura par cette opération, telle solution particuliere qu'on voudra.

XXV.

Supposons, par exemple, comme dans l'article XXIII, que la distance entre les deux couriers soit de 34 lieues, que le premier courier soit parti 14 heures plutôt que le second, qu'il fasse 7 lieues en 3 heures, et

Application de la solution précédente à des nombres.

que le second fasse 13 lieues en 4 heures, on aura :

$$a = 34, \quad b = 14, \quad c = 7$$
$$d = 3, \quad e = 13, \quad f = 4$$

qui donneront $ade = 34 \times 3 \times 13$, c'est-à-dire $= 102 \times 13 = 1326$,

$$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$$

et par conséquent $ade + bce = 2600$
$de = 39$, $cf = 28$ et partant $de - cf = 11$
d'où l'on tirera
$x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$, ainsi qu'on l'a trouvé dans l'article XXIII.

Autre application.

Si on veut ensuite tirer de la solution générale le premier cas calculé dans l'art. XXII, où les deux couriers étoient supposés partir du même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, et une vîtesse capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le second en fait 11 en 3. On aura dans ce cas........

$$a = 0, \quad b = 9, \quad c = 5,$$
$$d = 2, \quad e = 11, \quad f = 3,$$

et substituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x, on aura $x = \frac{9 \times 5 \times 11}{2 \times 11 - 5 \times 3}$ $= \frac{495}{7} = 70 + \frac{5}{7}$ ainsi qu'on l'a trouvé dans l'article XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plutôt trouvé la maniere de généraliser un problême, en se servant de lettres au lieu de nombres, qu'on a presque tou-

Digitized by Google

jours pris les problêmes dans leur plus grande généralité ; il faut donc accoutumer les commençans à les traiter ainsi. Dans cette vue nous allons résoudre le problême suivant.

Un ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a *dans un temps exprimé par* b ; *un second fait l'ouvrage* c *dans le temps* d ; *un troisieme l'ouvrage* e *dans le temps* f ; *on demande quel temps il faudra à ces trois ouvriers travaillant ensemble pour faire l'ouvrage* g. Cinquieme problême.

Soit x le temps cherché ; on aura l'ouvrage fait par le premier dans ce temps, en faisant la proportion suivante :

$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même temps par le second ouvrier en faisant la proportion :

$$d : c = x : \frac{cx}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le même temps par le troisieme ouvrier, par le moyen de cette proportion :

$$f : e = x : \frac{ex}{f}$$

Donc $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b}$ est l'ouvrage des trois ouvriers, lorsqu'ils travaillent ensemble pendant le temps cherché : mais cet ouvrage doit égaler g, on a donc l'équation

$$\frac{ex}{f} + \frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} = g.$$

Pour la résoudre, on multipliera, suivant les principes de l'article XVIII toute l'équation

par le produit fbd des diviseurs, et l'on aura $\frac{edfbx}{f} + \frac{cdbfx}{d} + \frac{adfbx}{b} = bdfg$, qui se réduit à $edbx + fcbx + adfx = bdfg$, dans laquelle remarquant que $edb + fcb + adf$ doit exprimer le nombre d'x contenus dans le second nombre, on aura

$$x = \frac{bdfg}{bde + bef + adf}$$

XXVII.

Pour faire quelqu'application de ce problême, supposons qu'un mâçon ait pu faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un second mâçon en ait pu faire 10 pieds en 3 jours, et un troisieme 11 en 4 jours, on demande le temps dans lequel ces trois mâçons travaillant ensemble, feront 150 pieds courans de la même muraille.

On aura par ces suppositions $a = 7$; $b = 5$; $c = 10$; $d = 3$; $e = 11$, $f = 4$, $g = 150$, et partant $bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150 = 9000$; $bde = 5 \times 3 \times 11 = 165$; $bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200$; $adf = 7 \times 3 \times 4 = 84$, ce qui donnera pour la valeur de x, $\frac{9000}{449}$, ou $20 + \frac{20}{449}$, nombre de jours dans lequel l'ouvrage proposé sera fait.

XXVIII.

Supposons maintenant qu'on demande en quel temps un réservoir de 200 pieds cubes, sera rempli par trois tuyaux, dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2 \frac{1}{2}$ jours, le second 15 pieds cubes en $3 \frac{1}{3}$ jours, et le troisieme

sieme 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours ; on aura $a = 9$; $b = 2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$; $c = 15$; $d = 3\frac{1}{3}$, ou $\frac{10}{3}$, $e = 19$; $f = 5\frac{1}{4}$ ou $\frac{21}{4}$; $g = 200$.

Par les substitutions on aura............

$$x = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{21}{4} \cdot 200}{\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 19 + \frac{5}{2} \cdot 15 \cdot \frac{21}{4} + 9 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{21}{4}}$$

qui devient $\dfrac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{950}{2 \times 3} + \frac{1575}{2 \times 4} + \frac{1890}{3 \times 4}}$.

Pour réduire cette quantité, je multiplie le numérateur et le dénominateur de la premiere fraction du diviseur par 4 ; le numérateur et le dénominateur de la seconde par 3 ; et le numérateur et le dénominateur de la troisieme par 2, ce qui change la quantité

en $\dfrac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{3800}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4725}{2 \times 3 \times 4} + \frac{5780}{2 \times 3 \times 4}}$

ou $\dfrac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{12305}{2 \times 3 \times 4}}$, ou $\frac{210000}{12305}$, ou $17 + \frac{163}{2461}$

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le réservoir donné, en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

XXIX.

On voit par les deux problêmes précédens, Les regles des art. X, et

suiv. suffisent pour les équations littérales.

que les regles qu'on a données (art. X et suiv.) pour résoudre les équations numériques du premier degré, peuvent également s'appliquer aux équations littérales; mais on voit en même-tems que ces regles sont trop succinctes pour que les commençans n'ayent pas besoin qu'on les conduise encore dans la maniere de les employer: nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'est probablement à un pareil travail qu'on doit plusieurs opérations d'Algebre très-utiles, que nous allons, pour ainsi dire, découvrir, chemin faisant.

L'application de ces regles a donné naissance à plusieurs opérations de l'Algebre.

Soit proposé de résoudre l'équation

$$2ac+ab-ax=3ac+2ax-5ab-dx.$$

Premier exemple de résolution d'équations littérales.

Je commence par passer les termes $3ac$ et $-5ab$, dans l'autre membre de l'équation en les changeant de signe, ce qui me donne

$$2ac+ab-ax-3ac+5ab=2ax-dx.$$

Je passe de même le terme $-ax$ de l'autre côté, en observant aussi de changer son signe, ce qui me donne

$$2ac+ab-3ac+5ab=2ax-dx+ax.$$

Je réduis ensuite cette équation, 1°. en ajoutant ab avec $5ab$, ce qui me donne $6ab$; 2°. en mettant $-ac$ au lieu des termes $2ac$ et $-3ac$; 3°. en mettant $3ax$ au lieu de $2ax+ax$; ainsi l'équation proposée devient $6ab-ac=3ax-dx$ qui donne $x=\frac{6ab-ac}{3a-d}$.

Digitized by Google

XXX.

Soit

$5ab+2ax-3bd=2ab-5ax+7bd-ac-dx$; les termes $5ab-3bd$ deviendront $-5ab+3bd$ en passant dans le second membre, et les termes $-5ax-dx$ deviendront $+5ax+dx$ en passant dans le premier ; on aura donc

Deuxieme exemple de résolution d'équations litérales.

$$2ax+5ax+dx=2ab+7bd-ac-5ab+3bd$$

qui se réduit à $7ax+dx=10bd-3ab-ac$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax+5ax$; $10bd$ à la place de $7bd+3bd$, et $-3ab$ à la place de $2ab-5ab$.

Dégageant présentement x de cette équation, on aura $x=\frac{10bd-ac-3ab}{7a+d}$.

XXXI.

Dans la résolution des deux équations précédentes, on a eu besoin de réduire à une plus simple expression différens termes de même espece, tels que $2ac$ et $-3ac$; $5ab$ et ab, etc. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les équations à résoudre et dans les autres parties de l'Algebre, les commençans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen, voici quelques exemples.

Réduction des quantités à leur plus simple expression.

Soit $15abc-13bcd-7abc+29bcd-5abf+9abc+6chi$ à réduire.

On prendra d'abord les termes $15abc$, $-7abc$ et $9abc$ qui sont de même espece,

On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de +, négatifs ceux qui sont précédés de —.

et on ajoutera les deux termes $15abc$ et $9abc$, qui sont l'un et l'autre positifs, c'est-à-dire, affectés du signe $+$; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24\ abc$, le terme $7\ abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe $-$: par ce moyen $17\ abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15\ abc - 7\ abc + 9\ abc$. De la même maniere, au lieu de $29\ bcd - 13\ bcd$, on mettra $16\ bcd$. Quant aux termes $-5\ abf$ et $6\ chi$ qui sont seuls de leurs especes, on les écrira tels qu'ils sont. Ainsi la quantité réduite sera

$$17\ abc + 16\ bcd - 5\ abf + 6\ chi.$$

Soit

$$\frac{5}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax,$$

on aura en réduisant

$$\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad.$$

La quantité

$$2acd - 5ach - 3acd + 3ach - 6bfi$$

deviendra en réduisant $-acd - 2ach - 6bfi$, qui étant entiérement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

L'addition algébrique est la même opération que la précédente.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même regle que celle qu'on appelle l'addition; car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite, et de les réduire après à leur plus simple expression : qu'on ait

besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac - 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité

$$6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf,$$

ce qui donnera donc $9ab - ac - 5ad + bf$ pour la somme des deux proposées.

Si on veut ajouter les deux quantités

$$2ac - 3ad + af \text{ et } ad - 5ac - 2af,$$

il ne s'agira que de réduire la quantité

$$2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af.$$

La réduction faite il viendra $-3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une addition puisse mener à une quantité négative; mais l'on trouvera bientôt le dénouement de cette difficulté, en remarquant qu'il faut nécessairement, ou que les deux quantités

$$2ac - 3ad + af \text{ et } ad - 5ac - 2af$$

soient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux soit négative et plus grande que l'autre.

C'est ce qu'on reconnoîtra plus facilement en faisant quelques exemples en nombres. Supposons d'abord que $a = 2, c = 3, d = 4, f = 5$, dans ce cas, au lieu de $2ac - 3ad + af$ nous aurons $12 - 24 + 10$ ou simplement -2, et au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = -42$. Ainsi leur somme sera -44, et on ne sera pas étonné que la somme de deux quantités négatives soit négative.

Supposons ensuite que $a=6$, $c=5$, $d=3$, $f=2$, on aura $2\,a\,c-3\,a\,d+a\,f=18$ et $a\,d-5\,a\,c-2\,a\,f=-156$. Or, comme la seconde quantité est négative, et plus grande que la premiere, la somme doit être négative.

XXXIII.

Comment on peut dire que l'on ajoute une quantité négative.

On demandera peut-être si on peut ajouter le négatif avec le positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute une quantité négative. A quoi je réponds que cette expression est exacte, quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux hommes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai qu'ils ajoutent leurs biens; que l'un ait des dettes et des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possédera qu'un bien négatif, et la jonction de sa fortune à celle du premier, diminuera le bien de celui-ci, ensorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédoit le premier, ou même entiérement négative.

XXXIV.

On tire encore de l'opération précédente la soustraction algébrique.

La réduction enseignée dans les articles précédens, donne encore naissance à une autre regle d'Algebre, la soustraction; car, par exemple, lorsque dans l'équation

$$2\,a\,c+a\,b-a\,x=3\,a\,c+2\,a\,x-5\,a\,b-d\,x$$

(art. XXIX.) on a passé les termes $3\,a\,c-5\,a\,b$ de l'autre côté, en les changeant de signe, et qu'on est arrivé à l'équation

$$2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx,$$

$$\text{ou } -ac + 6ab - ax = 2ax - dx,$$

je dis qu'on a retranché la quantité $3ac - 5ab$ de la quantité $2ac + ab - ax$, et que le reste est $-ac + 6ab - ax$. Car en faisant disparoître $3ac - 5ab$ du second membre de l'équation, c'est une soustraction qu'on a faite de cette quantité : or, pour que l'égalité soit conservée, il faut qu'on ait fait une pareille soustraction de l'autre côté ; donc

$$2ac + ab - ax - 3ac + 5ab,$$

ou $-ac + 6ab - ax$ est ce qui reste de la quantité $2ac + ab - ax$, lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Ainsi lorsqu'on a deux quantités dont l'une doit être soustraite, il faut changer les signes de celle qu'on veut soustraire, l'écrire à la suite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même espece, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit se démontrer de la maniere suivante. Procédé de la soustraction.

Soit la quantité $2ac + ab - ax$ dont on se propose de retrancher la quantité $3ac - 5ab$. Il est évident que si on vouloit retrancher de la premiere quantité simplement $3ac$, il faudroit écrire $2ac + ab - ax - 3ac$; mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac - 5ab$, on retranche une quantité trop grande de $5ab$: donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôtés de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ pour le reste

Digitized by Google

de $2ac + ab - ax$ lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Afin de s'exercer dans cette regle qu'on sent bien devoir être employée souvent, j'ajouterai les exemples suivans.

De $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ si on retranche $2ab - 5fg + 6ac + de$, il restera $5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab + 5fg - 6ac - de$; ou $3ab + 15fg - 9ac + de$.

De la quantité $6aeb + 3agh - 10bcd$ si on retranche $abc - 10aeb - 8agh$, on aura $16aeb - abc - 10bcd + 11agh$.

De la quantité $3ac + ab + be$ si on retranche la quantité $-ac - 3ab$, il viendra $4ac + 4ab + be$.

XXXV.

On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative.

Si on s'étonne que dans cette soustraction le reste $4ac + 4ab + be$ soit plus grand que la quantité $3ac + ba + be$ dont on se proposoit de soustraire $-ac - 3ab$, ce ne pourra être qu'en confondant, soustraire et diminuer; car si on reconnoît, au contraire, que soustraire une quantité quelconque, a, par exemple, d'une autre b, c'est savoir de combien b surpasse a, on trouvera très-possible qu'une quantité augmente par une soustraction. Qu'on demande, par exemple, de combien un homme est plus riche qu'un autre, si ce dernier n'a que des dettes, on verra bientôt que l'excès de richesse du premier sera ce qu'il possede, plus une somme égale aux dettes de l'autre.

XXXVI.

Toisieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit proposé de résoudre présentement l'équation

$$\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}.$$

pour faire disparoître d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir, suivant l'art. XV, de multiplicateur à tous les termes de l'équation, et l'on aura

$$cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c},$$

mais au lieu de $ac \times 2a$, il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac, et que le produit de a par ac doit être aac. De même $2a \times x$ sera $2ax$, et $4ad \times 2a$, sera $8aad$; car le produit de ad par a est aad et celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a.

L'équation est donc changée en

$$cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c},$$

$$\text{ou } cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$$

à cause que $\frac{2aac}{2b}$ ou $\frac{aac}{b}$ sont la même chose ; multipliant alors tous les termes de cette équation par b, elle deviendra $b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$ ou $bcx - aac = 2abx - \frac{8aabd}{3c}$ qui se changera encore en

$$cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd,$$

$$\text{ou } 3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabd,$$

car les produits de c par cbx, aac et $2abx$

seroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, et par conséquent ceux de 3 c par les mêmes quantités, doivent être triples, c'est-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$; transposant présentement, on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$, qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$.

XXXVII.

Un chiffre placé au dessus et à droite d'une lettre, désigne ce qu'elle auroit été répétée de fois par la multiplication.

Dans l'exemple précédent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres, a donné la répétition de ces lettres dans les produits : or, comme les Algébristes cherchent toujours à s'exprimer de la maniere la plus courte ils ont imaginé, au lieu de répéter une lettre plusieurs fois de suite, de ne l'écrire qu'une seule fois, en plaçant au-dessus de cette lettre, et à sa droite, un chiffre, qui désigne le nombre de fois que cette lettre devroit être répétée. Par-là, au lieu de l'expression précédente

$$x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc},$$

on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance exprimée par ce chiffre qu'on appelle *exposant*.

Lorsque dans une opération on aura besoin de aaa, c'est-à-dire, du produit de aa par a, ou de a multiplié par lui-même deux fois de suite, on mettra simplement a^3. De même au lieu de $cccc$, c^4. Lorsqu'une lettre est ainsi répétée ou plutôt censée répétée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle est élevée à la puissance exprimée par ce chiffre, et que ce chiffre est

Digitized by Google

son exposant. Ainsi c^4 ou $cccc$ qui est le produit de c trois fois par lui-même, est dit c élevé à la quatrieme puissance, et 4 est son exposant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui servent d'exposant avec ceux qui sont à la gauche des lettres et sur la même ligne : ceux-ci sont nommés *coëfficiens*, dans $4\,a^2\,c$, par exemple, 4 est le coëfficient du terme, 2 est l'exposant de a.

Les chiffres qui sont à gauche et sur la même ligne sont nommés *coëfficiens.*

XXXVIII.

Quatrieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation

$$\frac{2\,a\,b^2\,x}{3\,c^2\,d} + \frac{5\,a\,c^2}{b^2} = \frac{6\,c\,d^2}{a^2} - 3\,x$$

en multipliant tous ses termes par le diviseur $3\,c^2\,d$, on aura

$$2\,a\,b^2\,x + \frac{5\,a\,c^2 \times 3\,c^2\,d}{b^2} = \frac{6\,c\,d^2 \times 3\,c^2\,d}{a^2} - 3x \times 3c^2 d.$$

Pour faire ensuite les multiplications indiquées par les signes $\times$, nous remarquerons d'abord que $a\,c^2$ multiplié par $c^2\,d$ doit donner pour produit $a\,c^4\,d$; car si au lieu de $a\,c^2$ et de $c^2\,d$ on écrivoit $a\,c\,c$ et $c\,c\,d$, ainsi qu'on le pourroit, on verroit tout de suite que le produit de $a\,c\,c$ par $c\,c\,d$ seroit $a\,c\,c\,c\,c\,d$; c'est-à-dire, suivant l'article précédent $a\,c^4\,d$. Ayant donc $a\,c^4\,d$ pour le produit de $a\,c^2$ par $c^2\,d$, il est clair que $15\,a\,c^4\,d$ sera celui de $5\,a\,c^2$ par $3\,c^2\,d$.

De la même maniere on trouvera $18\,c^3\,d^3$ pour le produit de $6\,c\,d^2$ par $3\,c^2\,d$ et $9\,c^2\,d\,x$

pour celui de $3\,x$ par $3\,c^2\,d$. Donc l'équation précédente se changera en

$$2\,a\,b^2\,x + \frac{15\,a\,c^4\,d}{b^2} = \frac{18\,c^3\,d^3}{a^2} - 9\,c^2\,d\,x.$$

Multipliant ensuite cette nouvelle équation par b^2, elle devient

$$2\,a\,b^4\,x + 15\,a\,c^4\,d = \frac{18\,b^2\,c^3\,d^3}{a^2} - 9\,b^2\,c^2\,d\,x,$$

et multipliant de même celle-ci par a^2, on a

$$2a^3b^4x + 15a^3c^4d = 18b^2c^3d^3 - 9b^2a^2c^2dx$$

qui donne en transposant

$$2a^3b^4x + 9b^2a^2c^2dx = 18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d$$

d'où l'on tire enfin $x = \frac{18\,b^2\,c^3\,d^3 - 15a^3c^4\,d}{2\,a^3\,b^4 + 9\,a^2\,b^2\,c^2\,d}$.

XXXIX.

Les quantités incomplexes sont celles qui n'ont qu'un terme.

Dans les deux exemples précédens, on a eu besoin de savoir multiplier des quantités exprimées par un simple terme telle que $4\,a\,d$, $9\,c^2\,d$, etc. qu'on appelle communément quantités incomplexes ou monomes, et l'on a trouvé en même temps ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui résulte des raisonnemens qu'on a employés dans ces exemples particuliers, c'est de commencer par multiplier les coëfficiens; d'ajouter ensuite les exposans des mêmes lettres, et d'écrire de suite celles qui sont différentes. Ainsi, suivant cette regle,

Multiplication des quantités incomplexes tirée des exemples précédens.

$$3\,a^5\,b^3\,d \times 7\,a^2\,b\,d^2 = 21\,a^7\,b^4\,d^3;$$
$$\tfrac{9}{3}a^2cd \times \tfrac{2}{5}ac^3bd = \tfrac{18}{15}a^3c^4bd^2 = \tfrac{6}{5}a^3c^4bd^2;$$
$$\tfrac{2}{3}a\,c^2\,d\,e \times 9\,a^4fg = 6\,a^5\,c^2\,d\,e\,f\,g$$

XL.

Cinquieme exemple de

Soit l'équation $\frac{a^2c}{a^2b^2} + \frac{4\,c\,x}{3\,a} = \frac{5\,a\,b}{c} - 3\,a$, en

multipliant tous les termes par $2\ b^2$ j'aurai $a^2\ c + \frac{8\ b^2\ c\ x}{3\ a} = \frac{10\ a\ b^3}{c} - 6\ a\ b^2$, multipliant ensuite tous les termes par $3\ a$, j'aurai

résolution d'équations littérales.

$$3\ a^3\ c + 8\ b^2\ c\ x = \frac{30\ a^2\ b^3}{c} - 18\ a^2\ b^2,$$

et faisant encore la même opération pour chasser le diviseur c, il vient

$3\ a^3\ c^2 + 8\ b^2\ c^2\ x = 30\ a^2\ b^3 - 18\ a^2\ b^2\ c$, d'où l'on tire

$x = \frac{30\ a^2\ b^3 - 18\ a^2\ b^2\ c - 3\ a^3\ c^2}{8\ b^2\ c^2}$ qu'on peut encore écrire ainsi,

$x = \frac{30\ a^2\ b^3}{8\ b^2 . c^2} - \frac{18 a^2\ b^2\ c}{8\ b^2\ c^2} - \frac{3\ a^3\ c^2}{8\ b^2\ c^2}$; puisque $8\ b^2\ c^2$ divisant toute la quantité $30 a^2\ b^3 - 18 a^2\ b^2\ c - 3\ a^3\ c^2$, divise chacune de ses parties.

Or, la valeur d'x, ainsi écrite, peut avoir une plus simple expression, en réduisant chaque terme. Car, 1°. au lieu de $\frac{30\ a^2\ b^3}{8\ b^2\ c^2}$, on peut mettre $\frac{15\ a^2\ b}{4\ c^2}$, parce qu'on peut regarder le numérateur, comme le produit de $2\ b^2$ par $15\ a^2 b$, et le dénominateur comme celui de la même quantité $2\ b^2$ par $4\ c^2$, divisant donc l'un et l'autre par la même quantité $2\ b^2$, il vient $\frac{15\ a^2\ b}{4\ c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18\ a^2\ b^2\ c}{8\ b^2\ c^2}$, on peut mettre $\frac{9\ a^2}{4\ c}$; car le numérateur est le produit de $2\ b^2\ c$ par $9\ a^2$, et le dénominateur est le produit de la même quantité $2\ b^2\ c$ par $4\ c$. Au lieu de $\frac{5\ a^3\ c^2}{8\ b^2\ c^2}$ on peut mettre $\frac{3\ a^3}{8\ b^2}$. Donc la valeur d'x réduite est $\frac{15\ a^2\ b}{4\ c^2} - \frac{9a^2}{4c} - \frac{5\ a^3}{8\ b^2}$.

XLI.

Division des quantités incomplexes, tirée de cet exemple.

La méthode qu'il faudra suivre généralement dans toutes les opérations de même nature que les précédentes, c'est-à-dire, dans les divisions des quantités incomplexes, est aisée à tirer de ce qu'on vient de dire, surtout après avoir vu la multiplication des quantités incomplexes. On peut énoncer ainsi cette méthode.

Diviser d'abord les coëfficiens si la division est possible, ôter les lettres qui ont les mêmes exposans aux numérateurs et aux dénominateurs, diviser ensuite les lettres qui auront des exposans différens dans le dénominateur et dans le numérateur, en retranchant les plus petits exposans des plus grands, et en laissant les exposans résidus du côté où étoient les exposans les plus grands. Quant aux lettres différentes, il n'y a autre chose à faire qu'à les copier.

Comme cette opération est très-souvent nécessaire, il est bon de joindre ici quelques exemples pour en faciliter l'usage aux commençans.

$\frac{9a^5d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}$, $\frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b}$, $\frac{27a^3b^2c^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3$, $\frac{5a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}$.

XLII.

Sixieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$. Pour faire évanouir le diviseur $b - c$, il fau-

dra ainsi que ci-dessus, multiplier tous les termes par ce diviseur, ce qui donnera
$a\,a\,x + \overline{b - c} \times d\,c = \overline{b\,x - a\,c} \times \overline{b - c}$,
où j'ai observé, 1°. de mettre une barre au-dessus de $b - c$ dans le premier membre, parce que sans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dût multiplier $d\,c$; 2°. de mettre des barres au-dessus de $b\,x - a\,c$ et de $b - c$ dans le second membre, afin qu'on voie que ce sont ces deux quantités entieres qui doivent se multiplier.

Usage des barres au-dessus des quantités, le même que celui des parentheses.

C'est une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut désigner des produits ou des puissances de quantités complexes; au lieu d'une barre, on se sert quelquefois de parentheses. Ainsi $a^4\,(a + b)$, ou $a^4 \times \overline{a + b}$ signifient également le produit de a^4 par $a + b$; $(a + b) \times (b + d)$ ou $\overline{a + b} \times \overline{b + d}$ le produit de $a + b$ par $b + d$; $(ff + gg)^3$, ou $\overline{ff + gg}^{\,3}$ la quantité $ff + gg$ élevée à la puissance dont l'exposant est 3, c'est-à-dire (art. XXXVII.), multipliée deux fois par elle-même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes $\times$. Soit proposé d'abord de multiplier $d\,c$ par $b - c$, il est clair qu'il faudra multiplier $d\,c$ par b et en retrancher le produit de $d\,c$ par c; car $b - c$ étant plus petit que b de c, son produit par $d\,c$

Digitized by Google

doit être plus petit que celui de b par $c\,d$, de la quantité $c \times d\,c$. Donc le produit de $b - c$ par $d\,c$ est $b\,c\,d - c\,c\,d$.

Venons présentement au produit de $b\,x - a\,c$ par $b - c$; pour le trouver, je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $b\,x - a\,c$ pour une seule quantité, son produit par $b - c$ doit être, suivant ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $b\,x - a\,c$ par b surpasse le produit de $b\,x - a\,c$ par c. La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire et à une soustraction.

La premiere de ces deux multiplications, celle de $b\,x - a\,c$ par b, donnera $b\,b\,x - a\,b\,c$; la seconde celle de $b\,x - a\,c$ par c, donnera $b\,x\,c - a\,c\,c$; reste donc à retrancher cette derniere quantité de la premiere, ce qui donnera, suivant l'article XXXIV. $b\,b\,x - a\,b\,c - b\,c\,x + a\,c^2$, et c'est-là le produit de $b\,x - a\,c$ par $b - c$.

De sorte que l'équation

$$\frac{a^2\,x}{b-c} + c\,d = b\,x - a\,c,$$

ou $a^2\,x + \overline{b - c} \times c\,d = \overline{b\,x - a\,c} \times \overline{b - c}$ est devenue

$a^2\,x + b\,c\,d - c^2\,d = b^2\,x - a\,b\,c - b\,c\,x + a\,c^2$, qui, par les transpositions ordinaires, donnera $b\,c\,d - c^2\,d + a\,b\,c - a\,c^2 = b^2\,x - b\,c\,x - a^2\,x$, ou enfin

$$x = \frac{b\,c\,d - c\,c\,d + a\,b\,c - a\,c^2}{b^2 - b\,c - a^2}$$

XLIII

XLIII.

Multiplication des quantités complexes ou polynomes, tirée de l'article précédent.

Dans cet exemple, nous avons eu besoin de former une regle d'algebre, dont nous ne nous étions pas encore servis, et qui, pouvant être souvent utile, mérite que nous nous y arrêtions. On appelle cette regle multiplication des polynomes. Polynome ou quantité complexe, signifie en général une quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome, lorsqu'elle en a deux; trimone, lorsqu'elle en a trois, etc.

Exemple de multiplication de Polynomes.

Afin de s'exercer à la multiplication de ces sortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples: soit premierement $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ et $3ab^2 - 4bcd$ dont on demande le produit.

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que, puisque la quantité $3ab^2 - 4bcd$ est plus petite que $3ab^2$ de $4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ doit être plus petit que celui de $3ab^2$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$, du produit de $4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$.

En conséquence j'écris d'abord ainsi le produit demandé $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 3ab^2 - \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd$.

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes $\times$, de la même maniere

que celles des quantités incomplexes, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2$ pour la valeur du premier produit $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 3ab^2$. On aura de même

$8a^3bc^3d - 20a^4b^2cd + 24a^5bcd$ pour la valeur du second produit

$$\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd.$$

Retranchant alors le second du premier, ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2 - 8a^3bc^3d + 20a^4b^2cd - 24a^5bcd$, pour le produit des deux quantités proposées.

XLIV.

Si le multiplicateur de la quantité précédente, outre les deux termes $3ab^2 - 4bcd$, avoit encore contenu un autre terme, $-5abc$, par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente, le produit de $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ par $5abc$. Car on auroit dit de même que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd - 5abc$ étant plus petit de $5abc$ que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ doit être plus petit de $5abc \times \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$, que le produit de $3ab^2 - 4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$. Par la même raison, s'il y avoit eu un autre terme, $3acc$, par exemple, au multiplicateur

Digitized by Google

avec le signe +, il auroit fallu ajouter le produit

$$3\,acc \times \overline{2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5}$$

aux produits précédens.

Principe fondamental des multiplications.

En général, on voit qu'un multipliçande quelconque, c'est-à-dire, une quantité quelconque à multiplier, étant donné avec la quantité qui doit lui servir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, et ajouter ou retrancher ces produits, suivant que les termes qui les auront donnés, auront le signe + ou le signe —.

Pour exécuter cette opération avec autant d'ordre qu'il est nécessaire, voici le procédé qu'on suit.

XLV.

Méthode qu'il faut suivre dans la multiplication.

On commence par écrire le multiplicateur sous le multiplicande, et l'on tire une barre sous le multiplicateur. Pour former ensuite la premiere ligne du produit que l'on doit écrire sous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en observant de laisser à chacun de ces produits, le signe du terme du multiplicande, si le premier terme du multiplicateur n'a aucun signe, et est par conséquent censé avoir le signe +.

Pour former ensuite la seconde ligne qui doit être écrite sous la premiere, on multiplie le second terme du multiplicateur par tous les

termes du multiplicande, et si ce second terme du multiplicateur a encore le signe +, c'est absolument la même opération que pour la premiere ligne; mais s'il a le signe —, à chacun des produits dont cette ligne est composée, on met un signe contraire à celui du terme du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même maniere, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre; et l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers; la quantité qui vient alors est le produit demandé.

Nous venons de supposer que le premier terme du multiplicateur avoit le signe +: si cependant il avoit le signe —, on voit bien qu'à l'égard de ce terme, comme à l'égard des autres qui auroient aussi le signe —, il faudroit observer de prendre les signes contraires à ceux des termes du multiplicande, en écrivant le produit de ces termes.

XLVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin d'éclaircir cette méthode, appliquons-la à un exemple. Soit proposé de multiplier les deux quantités

$2ab - 4ac + ad$ et $3ab - 5ac + 2ad$.

La premiere étant prise pour le multiplicande, et la seconde pour le multiplicateur, on écrit cette derniere sous l'autre, et on tire ensuite

Case 1.

d

$^{2}\,b\,d$
$^{1}\,c\,d$
$^{1}\,d^{2}$

$-\,13\,a^{2}\,c\,d + 2\,a^{2}\,d^{2}$

EMA... NAPOLI ... VITTORIO ... NAZ... ALE

Case 2.

c^{2}
c^{2}

$^{5}\,b\,c^{2}$
$b^{3}\,c^{2}$
$12\,a^{4}\,c^{4}$

$-\,10\,a^{3}\,b^{3}\,c^{2} + 12\,a^{4}\,c^{4}$

Case 4.

$a\,b + 3\,a\,c - c\,c$
$a\,b + 3\,a\,c - c\,c$

$5\,a^{2}\,b\,c + 5\,a\,b\,c\,c$
$9\,a^{2}\,c^{2} - 3\,a\,c^{3}$
$3\,a\,c^{3} + c^{4}$

$a^{2}\,c^{2} - 6\,a\,c^{3} + c^{4}$

Case 5.

$+\,3\,a\,a\,y$

$+\,6\,a^{3}\,x\,y$
$-\,9\,\cdot^{3}\,y^{2}$

$+\,3\,a\,b\,x\,y^{2} + 3\,a^{3}\,x\,y - 9\,a^{3}\,y^{2}$

Digitized by Google



Digitized by Google

une barre sous ces deux quantités; voyez la premiere case de la table ci-jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme du multiplicateur est censé positif, et que par conséquent tous les signes des termes de la premiere bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc, suivant cette remarque, à la premiere ligne sous la barre, le premier terme $6\ a^2\ b^2$ que donne le produit de $3\ a\ b$ par $2\ a\ b$, sans l'affecter d'aucun signe, ce qui est la même chose que si on lui donnoit le signe +.

On met ensuite — pour le signe du second terme de la même bande, parce que c'est le signe du second terme du multiplicande, et on fait suivre ce — de $12\ a^2\ b\ c$ produit de $4\ a\ c$ et de $3\ a\ b$. On conserve de même le signe + du troisieme terme du multiplicande pour le troisieme terme de la premiere bande du produit, et l'on écrit pour ce terme $3\ a^2\ b\ d$ produit de $a\ d$ et de $3\ a\ b$. La premiere bande du produit étant ainsi achevée, on remarque que le second terme du multiplicateur a le signe —, et que par conséquent il faut changer tous les signes du multiplicande pour former les termes de la seconde bande du produit. Ainsi le premier terme de cette seconde bande doit avoir — qu'on écrit donc devant le produit de $10\ a^2\ b\ c$ des deux termes $2\ a\ b$, $5\ a\ c$.

Le second terme de la même bande devant avoir +, puisque le second terme du multi-

plicande a le signe —, on écrit ce signe + devant le produit 20 $a^2 c^2$ des deux termes 4 $a c$, 5 $a c$.

Le troisieme terme $a d$ du multiplicande étant précédé du signe +, le troisieme terme de la seconde bande sera donc affecté du signe — qu'on écrit devant le produit 5 $a^2 c d$ des deux termes $a d$, 5 $a c$.

Quant à la troisieme bande du produit cherché, comme le troisieme terme du multiplicateur a le signe +, il faudra garder tous les signes du multiplicande, et par conséquent le premier terme, c'est-à-dire le produit de 2 $a b$ et de 2 $a d$, sera 4 $a^2 b d$ précédé du signe +; le second, c'est-à-dire, le produit de 4 $a c$ et de 2 $a d$, sera 8 $a^2 c d$ précédé du signe —, et le troisieme, c'est-à-dire, le produit de 2 $a d$ par $a d$, sera 2 $a^2 d^2$ précédé du signe +.

Afin que les commençans puissent se fortifier dans la pratique de cette regle, j'ai joint dans la Table quelques exemples.

XLVII.

Sixieme exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac$, on fera d'abord évanouir le diviseur $d - c$ en multipliant $ax - ac$ par $d - c$; et l'on aura $ab^2 + abd - abx = \overline{ax - ac} \times \overline{d - c}$, ou $ab^2 + abd - abx = adx - acd - acx + acc$, qui, en passant tous les termes affectés d'x

d'un côté, et les termes connus de l'autre, deviendra
$ab^2 + abd + acd - acc = abx + adx - acx$.
d'où l'on tire

$$x = \frac{ab^2 + abd + acd - ac^2}{ab + ad - ac}.$$

Dans cette expression, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du dividende et ceux du diviseur, peut faire soupçonner que la division se feroit exactement, et invite par conséquent à tenter cette opération, qui doit paroître assez aisée à faire, après avoir vu celle de la multiplication dont elle est l'inverse.

Maniere de faire la division indiquée dans cet exemple.

Pour reconnoître donc si en effet $ab + ad - ac$ peut diviser exactement $ab^2 + abd + acd - ac^2$. Soit d'abord divisé un des termes de cette derniere quantité par un de ceux de la premiere, soit divisé ab^2 par ab, par exemple, et soit écrit à part le quotient b. Soit ensuite multiplié ce quotient b, ou plutôt cette premiere partie du quotient cherché, par le diviseur total $ab + ad - ac$, et soit retranché le produit $ab^2 + abd - abc$ du dividende, le reste $ab^2 + abd + acd - ac^2 - ab^2 - abd + abc$, ou $acd - ac^2 + abc$, sera encore à diviser par le même diviseur, et son quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Pour faire cette division, je prends encore

un des termes de la quantité $acd - acc + abc$ qui reste à diviser, et je le divise par un de ceux du diviseur. Je choisis acd, par exemple, pour le diviser par ad. Or, cette division me donne c; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le diviseur total $ab + ad - ac$, et je retranche le produit $abc + acd - ac^2$ du dividende restant $acd - ac^2 + abc$; et comme les deux quantités sont les mêmes, et qu'il ne reste par conséquent rien à diviser, je vois par-là que $b + c$ est exactement le quotient de la division de $ab^2 + abd + acd - ac^2$ par $ab + ad - ac$ et partant la valeur d'x.

XLVIII.

Méthode générale pour les diviseurs des quantités complexes.

Après avoir fait la division précédente, on voit à-peu-près comment on doit se conduire dans les autres exemples. Pour opérer dans la division avec un certain ordre, on écrit ordinairement le diviseur à droite du dividende en les séparant d'une barre verticale, ainsi que dans la division arithmétique. Ayant choisi dans le dividende un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, on écrit le quotient de ces deux termes sous le diviseur, et on lui donne $+$ pour signe, si les deux termes qu'on a divisés l'un par l'autre ont le même signe; on lui donne, au contraire, le signe $-$, si ces deux termes ont des signes différens. Cela fait, on multiplie ce quotient par tous les termes du diviseur, et

on écrit le produit qui en vient sous le dividende. Mais comme l'usage de ce produit doit être de le retrancher du dividende, on observe, en l'écrivant sous ce dividende, de mettre à chaque terme le signe contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainsi écrit, on tire une barre, et l'on fait la réduction avec le dividende, et la quantité qui reste, est à diviser de nouveau par le même diviseur. On y choisit de même un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, et on écrit le terme qui en vient pour quotient à côté du premier, en observant de lui donner le signe +, ou le signe —, suivant que les deux termes qu'on aura divisés, seront de mêmes ou de différens signes. On multiplie ensuite ce terme par tous ceux du diviseur, et on écrit le produit sous la quantité à diviser, en observant de même que la premiere fois, de changer les signes que la multiplication donne. Tirant alors une barre et réduisant, si tous les termes ne se détruisent pas, on écrit le reste sous cette barre, et on pousse l'opération de la même maniere, jusqu'à ce que tous les termes du dividende soient évanouis.

Dans cette opération, on pourroit quelquefois être embarrassé à choisir parmi les termes du dividende et du diviseur, ceux qui doivent servir à former les termes du quotient.

Maniere d'éviter tout tâtonnement dans la division.

Afin d'éviter tout tâtonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé.

On choisit d'abord à volonté une lettre qui se trouve dans le dividende et dans le diviseur ; et l'on dispose les termes de ces deux quantités, de maniere que les premiers soient ceux où cette lettre a le plus grand exposant, que les seconds soient ceux où la même lettre a le plus grand exposant après les premiers, et ainsi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités proposées par rapport à la même lettre (c'est ainsi qu'on appelle cette opération) on n'a plus aucun tâtonnement à faire pour choisir les termes qui doivent se diviser ; ce sont toujours les premiers termes du dividende et du diviseur qu'il faut prendre.

Ce que c'est qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre.

Lorsqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviseur et du dividende, le premier terme du quotient, et qu'on aura écrit avec des signes différens, le produit sous le dividende, s'il arrive que cette opération ait introduit des termes qui n'aient point de semblables dans le dividende ; il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de maniere que la quantité qui reste à diviser, reste toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviseur.

XLIX.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin de faciliter aux commençans l'usage de

cette méthode, prenons quelques exemples. Supposons d'abord qu'il s'agisse de diviser la quantité $31\ aabb + 2\ a^4 + 24\ b^4 - 38\ ab^3 - 13\ a^3 b$ par la quantité $-3\ ab + 2\ aa + 4\ bb$.

Ayant écrit ces deux quantités, comme on le voit dans la Table ci-jointe (case premiere) où elles sont ordonnées par rapport à la lettre a, je divise le premier terme $2\ a^4$ du dividende par le premier $2\ a\ a$ du diviseur, et j'écris le quotient $a\ a$ sous le diviseur, sans lui donner aucun signe, c'est-à-dire que je le fais positif, à cause que les termes $2\ a^4$ et $2\ aa$ sont précédés des mêmes signes. Le quotient aa étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviseur, et comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2\ a^4$ produit de $a\ a$ par $2\ a\ a$ avec le signe $+$, je porte ce terme sous le dividende avec le signe $-$ à cause qu'il doit être retranché.

De même le second terme $3\ b\ a^3$ produit de $a\ a$ par $3\ b\ a$ devant avoir le signe $-$ par la multiplication, j'écris sous le dividende $+ 3\ b\ a^3$ par la raison qu'il doit être soustrait. Enfin, parce que le troisieme terme $4 b^2\ a^2$ produit de $a\ a$ par $4\ b\ b$ devroit avoir par la multiplication le signe $+$, je lui donne le signe $-$, en l'écrivant sous le dividende.

Cela fait, je tire une barre et je réduis, la quantité qui reste alors est

$-10ba^3+27b^2a^2-38b^3a+24b^4$ qu'il faut diviser par le même diviseur $2a^2-3ba+4bb$. Pour faire cette division, je prends le premier terme $10ba^3$ de cette quantité à diviser, et je le divise par le premier terme $2a^2$ du diviseur, il vient $5ba$ pour le quotient auquel je donne le signe —, à cause que les termes $10\ b\ a^3$ et $2\ a^2$ ne sont pas précédés des mêmes signes. Ayant écrit $-5ba$ à côté de a^2, il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du diviseur, et d'en changer les signes en les écrivant sous la quantité à diviser.

Je multiplie donc d'abord $5\ b\ a$ par $2\ a^2$, comme le produit devroit être négatif à cause que le signe — de $5\ b\ a$ doit changer, suivant les regles de la multiplication, les signes du multiplicande $2\ a^3-3\ b\ a+4\ b^2$, et que, suivant ce que nous venons de dire, les produits doivent être changés de signe, lorsqu'on les écrit sous la quantité à diviser, j'écris $+10\ b\ a^3$ sous cette quantité. De même au lieu de donner à $15\ b\ b\ a\ a$, produit de $3ba$ par $5\ b\ a$, le signe + que l'on auroit par la multiplication, je l'écris avec le signe — sous la quantité à diviser. Enfin, au lieu de donner à $20\ b^3\ a$ produit de $5\ b\ a$ par $4bb$ le signe — que demanderoit la multiplication, je l'écris avec le signe + sous la quantité à diviser. Je tire alors une barre et je réduis, ce qui me donne $12\ b^2\ a^2-18\ b^3\ a+24\ b^4$, quan-

tité qu'il faut encore diviser par $2a^2 - 3ba + 4bb$.

Pour faire cette nouvelle division, je divise le terme $12b^2a^2$ par $2a^2$, et j'ai, pour troisieme terme du quotient, $6bb$, que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le signe $+$, à cause que $12b^2a^2$ et $2aa$ ont le même signe.

Multipliant présentement $6b^2$ par $2a^2$, j'ai $12b^2a^2$ auquel je donne le signe $-$ en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe $+$. De même multipliant $6b^2$ par $3ba$, j'ai $18b^3a$, auquel je donne le signe $+$ en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe $-$. Enfin, multipliant $6bb$ par $4b^2$, j'ai $24b^4$ auquel je donne le signe contraire à celui que donneroit la multiplication. Réduisant alors, je vois que tous les termes se détruisent. Donc la division est exacte. Donc le quotient cherché est $aa - 5ba + 6bb$.

L.

Qu'on se propose maintenant de diviser $6b^3c - b^4 - 9ccbb + 4c^4$ par $-3cb + bb + 2cc$. Autre exemple

J'écris ces deux quantités sous la forme qu'on voit dans la case de la table suivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c.

Divisant alors les deux premiers termes, j'ai $2cc$ pour le premier terme du quotient, lequel étant multiplié par le diviseur, donne,

Digitized by Google

en changeant les signes, la quantité $-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc$, qui étant placée sous le dividende, donne pour le reste $6bc^3 - 11bbcc + 6b^3c - b^4$, dans laquelle j'ai observé que le terme $6bc^3$ affecté de c^3 introduit par la multiplication, fût placé le premier, afin que la quantité restât ordonnée par rapport à c. Divisant alors ce premier terme $6bc^3$ par $2cc$, j'ai $3bc$ pour quotient avec le signe $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviseur, et je porte les termes qui en viennent sous le dividende, en changeant leurs signes. Faisant la réduction ensuite, je n'ai plus que $-2bbcc + 3b^3c - b^4$ à diviser. Le premier terme de cette quantité étant divisé par celui du diviseur, donne pour troisieme terme du quotient b^2 affecté du signe $-$, à cause que les termes $2b^2c^2$ et $2c^2$ sont de différens signes; et comme le produit de ce troisieme terme par le diviseur détruit tous ceux de la quantité à diviser, je conclus que la division est exacte, et que $2cc + 3bc - b^2$ est le quotient demandé.

LI.

Attention qu'il faut avoir en ordonnant, lorsqu'il y a plusieurs lettres.

Lorsqu'on veut ordonner le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, si on trouvoit plusieurs termes où cette lettre fût élevée à la même puissance, on tomberoit encore dans l'inconvénient du tâtonnement, à moins qu'on n'ordonnât encore ces termes par

rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Supposons, par exemple, que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d, on eût de suite $3accd^3 - c^3 d^3 - 3aacd^3 + a^3 d^3$ pour les premiers termes du dividende, et que dans le diviseur on eût de même $aad^2 + ccd^2 - 2acd^2$ pour les premiers termes, en arrangeant ainsi ces deux quantités $a^3 d^3 - 3caad^3 + 3ccad^3 - c^3 d^3$; $a^2 d^2 - 2cad^2 + ccd^2$; c'est-à-dire, en les ordonnant par rapport à la lettre a, il n'y auroit aucun tâtonnement à craindre en faisant la division, pourvu qu'on observât, à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient, que la quantité à diviser fut toujours ordonnée de la même maniere. Pour exercer les commençans à ces attentions dans la division, j'ai joint encore quelques exemples dans la Table suivante.

LII.

Dans la solution des problêmes précédens, nous n'avons eu besoin que d'une seule inconnue, parce qu'il n'y avoit, à proprement parler, dans ces problêmes qu'une quantité à trouver. Mais, comme en avançant dans la science de l'Algebre, on trouve des problêmes où l'on est obligé d'employer plusieurs inconnues, nous allons voir comment on les traite.

Etant données les pesanteurs spécifiques de deux matieres qui entrent dans un mixte, le Problême dans lequel on employe deux inconnues.

volume et le poids total du mixte, trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans le mixte.

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte, ou, en général, son volume de quelque maniere qu'il soit mesuré, soit exprimé par . . . . a.

Que son poids total soit exprimé par . . . b.

Que la quantité de la premiere matiere contenue dans le mixte, par exemple, ce qu'il y a de pouces cubes de cette matiere soit exprimé par . . . . x.

Que le poids d'un pouce cube de cette matiere, ou, en général, sa pesanteur spécifique soit . . . . c.

La quantité de la seconde matiere . . . . y.

Sa pesanteur spécifique . . . . d.

On aura pour le poids de la quantité de la premiere matiere qui entre dans le mixte. $c\,x$.

Car, si x exprime le nombre de pouces cubes de cette matiere, et c le poids de chaque pouce cube, leur poids total sera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la seconde matiere . . . . . $d\,y$.

Or, comme ces deux poids doivent, étant ajoutés, faire le poids total du mixte, on a donc l'équation

$$c\,x + d\,y = b$$

mais cette équation ne sauroit suffire pour résoudre le problême; car si on veut en dégager l'une

$-3\,b\,a + 4\,b^2$
$-5\,b\,a + 6\,b^2$

Case 1.



$-3\,b\,c + b\,b$
$+3\,b\,c - b\,b$

Case 2.

$d^2 - 2\,c\,a\,d^2 + c^2\,d^2 + a\,c^2\,d$
$d \quad - \quad c\,d$

Case 3.

$+ c^6$ | $ab^2 - cb^2 + 2\,cab + c^3$
$ab^2 + cb^2 - 3\,cab + c^3$

$+ c^6$

Case 4.

$- c^4\,bb - \quad c^4\,ab + c^6$
$+ 3\,c^4\,ab$

$- c^4\,bb + 2\,c^4\,ab + c^6$
$+ c^4\,bb - 2\,c^4\,ab - c^6$

o

$2\,b\,a - d\,a + 3\,c\,b$
$3\,b\,a + d.a - 4\,c\,b$

Case 5.

Digitized by Google

l'une des inconnues, x, par exemple, on trouve

$$x = \frac{b - dy}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en supposant qu'on connoisse y. Il y a donc quelqu'autre opération à faire pour connoître y. Pour y parvenir, il faut voir si on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la question, ou, pour parler comme les Algébristes, si on a rempli toutes les conditions du problême : pour peu qu'on y réfléchisse, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte soit b, et qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la premiere matiere ajoutée avec la quantité de la seconde doit faire le volume total. On aura donc, par cette seconde condition, l'équation

$$x + y = a$$

qui, ainsi que la premiere, ne nous apprend la valeur de x, qu'au moyen de celle de y, en nous donnant

$$x = a - y.$$

Mais si on ne peut pas, par aucune de ces deux équations prises séparément, trouver x indépendamment de y, on trouve bientôt, en se servant à la fois de l'une et de l'autre, le moyen d'avoir y entiérement connu. Car, puisque chacune de ces deux équations donne une

valeur de x, on peut égaler ces deux valeurs, ce qui donne l'équation

$$\frac{b-dy}{c} = a-y$$

de laquelle on tire, par les méthodes précédentes, $b - dy = ac - cy$, ou $ac - b = cy - dy$, ou enfin $y = \frac{ac-b}{c-d}$.

y étant connu, on voit bien que x, qui est également $a-y$, ou $\frac{b-dy}{c}$, est aussi connu. On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la premiere $a-y$, par exemple, à la place de y, $\frac{ac-b}{c-d}$, et l'on aura $a - \frac{ac-b}{c-d}$ pour la valeur de x.

En examinant la valeur précédente

$$a - \frac{ac-b}{c-d},$$

on découvre bientôt qu'on peut l aréduire; car si on veut mettre a au même dénominateur que la fraction $\frac{ac-b}{c-d}$, il faut le multiplier par $c-d$, ce qui donne $\frac{ac-ad}{c-d}$ au lieu de a; ainsi il ne s'agit plus que de retrancher de cette fraction la seconde $\frac{ac-b}{c-d}$. Retranchant pour cela leurs numérateurs, et divisant le reste par le dénominateur commun, on aura $\frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$ ou $\frac{b-ad}{c-d}$ pour la valeur réduite de x.

Les quantités demandées, tant de la premiere que de la seconde matiere qui entrent dans le mixte, sont donc exprimées, l'une

par $\frac{ac-b}{c-d}$ et l'autre par $\frac{b-ad}{c-d}$, ainsi le problême est résolu.

LIII.

Si au lieu de substituer la valeur $\frac{ac-b}{c-d}$ de y dans $a-y$, on l'avoit substituée dans $\frac{b-dy}{c}$ qui est également la valeur de x, on auroit eu $\frac{b-d\times\overline{\frac{ac-b}{c-d}}}{c}$ qui d'abord ne paroît guères être la même valeur que $\frac{b-ad}{c-d}$. Mais comme on sait que les valeurs $a-y$ et $\frac{b-dy}{c}$ de x sont égales, et que ce n'est même que parce qu'elles le sont qu'on a déterminé la valeur de y, on doit être sûr qu'en examinant ces deux dernieres valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment on peut parvenir à réduire l'une à l'autre.

On donnera d'abord le dénominateur $c-d$ à la lettre b, ce qui se fera en le multipliant par $c-d$, c'est-à-dire, en mettant $\frac{bc-db}{c-d}$ au lieu de b, et alors la quantité précédente

$$\frac{b-\frac{d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c}$$

se changera en $\frac{\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c}$, ou $\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{cc-dc}$; mais au lieu de $d\times\overline{ac-b}$,

on peut écrire $a\,c\,d - b\,d$, et comme cette quantité doit être retranchée de $b\,c - b\,d$, la quantité précédente $\frac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{cc - dc}$ deviendra donc en réduisant $\frac{bc - dca}{c^2 - dc}$, qui, en divisant le numérateur et le dénominateur par la même quantité c, devient enfin $\frac{b - da}{c - d}$ même valeur que ci-dessus.

LIV.

Application de la solution précédente à un exemple.

Pour faire présentement une application de la solution générale qu'on vient de trouver, supposons que le mixte soit composé d'or et d'argent (1), que son poids total soit de 30 onces, son volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de $12\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de $6\frac{8}{9}$ onces, on aura $a = 3$, $b = 30$, $c = 12\frac{2}{3}$, $d = 6\frac{8}{9}$, substituant donc ces valeurs dans les deux formules générales $x = \frac{b - da}{c - d}$ et $y = \frac{ac - b}{c - d}$ elles deviendront $x = \frac{21}{13}$ et $y = \frac{18}{13}$, c'est-à-dire, que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or et $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

LV.

On découvre aisément, par ce qu'on a vu

(1) Le problème qu'Archimede eut à résoudre, lorsqu'on lui proposa de déterminer la quantité d'argent qui étoit alliée avec l'or dans la couronne du roi Hiéron, ne pouvoit pas être autre chose que celui qu'on vient de voir, aussitôt qu'il eut déterminé la pesanteur spécifique du métal de cette couronne, ce qu'il fit en examinant combien elle perdoit de son poids en la pesant dans l'eau.

Digitized by Google

dans le problême précédent, que toutes les fois qu'on aura employé deux inconnues dans une question, il faudra deux équations pour les dégager; et que lorsqu'on demande deux quantités dans un problême, il faut aussi qu'on donne deux conditions pour les déterminer, afin qu'on puisse tirer de ces deux conditions les deux équations nécessaires. Pour montrer la maniere d'employer ces conditions, nous donnerons encore le problême suivant.

LVI.

Autre problême où l'on emploie deux inconnues.

Deux sources qui coulent chacune uniformément, ont rempli ensemble un réservoir a, *l'une en coulant pendant un temps* b, *l'autre pendant un temps* c ; *les deux mêmes sources ont rempli un autre réservoir* d, *la premiere coulant pendant le temps* e, *la seconde pendant le temps* f : *on demande la dépense de chacune de ces sources.*

Soient x et y ces dépenses, c'est-à-dire, par exemple, ce que chacune de ces deux sources fourniroit de muids d'eau par jour, en supposant que les réservoirs a et d fussent mesurés en muids, pendant que les temps b, c, e, f, seroient comptés en jours.

On aura $b\,x$ pour la quantité d'eau fournie par la premiere source pendant le temps b; et de même $c\,y$ pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le temps c. Mais ces deux quantités d'eau par la premiere

condition du problême doivent être égales au réservoir a, on a donc l'équation

$$b\,x + c\,y = a.$$

On aura de même $e\,x$, $f\,y$, pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les temps e, f, et par conséquent la seconde condition donnera

$$e\,x + f\,y = d$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux équations les valeurs de x et de y, ce qui se fera, ainsi que dans le problême précédent, en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux équations et en les égalant ensuite. La premiere sera $\frac{a - cy}{b}$, la seconde $\frac{d - fy}{e}$ égalant donc ces deux valeurs, on aura

$$\frac{a - cy}{b} = \frac{d - fy}{e},$$

ou $a\,e - c\,e\,y = b\,d - b\,f\,y$, ou $a\,e - b\,d = c\,e\,y - b\,f\,y$, ou enfin

$$y = \frac{ae - bd}{ce - bf}.$$

Substituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x, dans $\frac{a - cy}{b}$ par exemple, il viendra $x = \frac{a - c \times \frac{ae - bd}{ce - bf}}{b}$ ou $x = \frac{a \times \overline{ce - bf} - c \times \overline{ae - bd}}{b \times \overline{ce - bf}}$ en mettant le premier terme a au même dénominateur que

le second, et en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faisant ensuite les multiplications indiquées dans cette valeur et réduisant, on aura

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf}$$

Il n'est donc plus question maintenant que d'avoir les valeurs particulieres de a, b, c, d, e, f, pour les substituer dans ces deux valeurs générales de x et de y, afin d'en tirer telle solution particuliere qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux équations précédentes, et d'égaler les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y, il est clair qu'on pouvoit également commencer par dégager y, en égalant ensuite ses deux différentes valeurs pour en tirer x, et que par cette opération on seroit parvenu nécessairement au même résultat.

LVII.

Pour faire présentement quelque application de ce problême, supposons que la premiere source ayant coulé deux jours, et la seconde trois, elles ayent rempli un réservoir de 195 muids. Ensuite la premiere source ayant coulé cinq jours, et la seconde quatre, elles ayent rempli un réservoir de 330 muids. Exemple du problême précédent en nombres.

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$, et par conséquent $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$, d'où $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{210}{7} = 30$ et $y = \frac{ae - bb}{ce - bf}$

$= \frac{315}{7} = 45$; ainsi la premiere source, dans cet exemple, fournit 30 muids par jour, et la seconde 45.

LVIII.

Autre exemple.

Supposons présentement que la premiere source ayant coulé pendant 4 jours, et la seconde pendant 6 jours, elles ayent rempli un réservoir de 120 muids. Ensuite que la premiere ayant coulé 3 jours, et la seconde 7, elles ayent rempli un réservoir de 190 muids.

On aura, dans ce cas, $a=120$, $b=4$, $c=6$, $d=190$, $e=3$, $f=7$, et par conséquent $dc-af=300$, $ce-bf=-10$, $ae-bd=-400$, ce qui donnera

$$x = \frac{dc-af}{ce-bf} = \frac{300}{-10}$$

$$\text{et } y = \frac{ae-bd}{ce-bf} = \frac{-400}{-10}.$$

Singularité des expressions où l'on arrive dans cet exemple.

La premiere fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'est-à-dire, des quantités négatives divisées par des quantités négatives, et des positives, divisées par des négatives; on aura dû être embarrassé à savoir ce qu'elles devoient signifier, et ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens métaphysiques, auront cherché à reprendre la question d'un peu plus haut, afin d'éviter ces sortes de divisions: voici, par exemple, ce qu'on aura pu faire pour cela dans cette question-ci.

Maniere de reconnoître ce qu'elles peuvent signifier.

On aura repris les deux équations générales $bx+cy=a$, et $ex+fy=d$, et substituant, dans ces équations pour a, b, c, d, e, f, les va-

leurs que ces lettres ont dans cet exemple, on aura eu $4x + 6y = 120$, et

$$3x + 7y = 190.$$

Tirant de ces équations, $x = 30 - \frac{5y}{2}$, et $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$, on aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné

$$30 - \frac{3y}{2} = \frac{190}{3} - \frac{7y}{5},$$

ou $\frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30$, ou $y = 40$.

Substituant ensuite cette valeur de y dans $30 - \frac{3}{2}y$ valeur de x, on aura eu $x = 30 - 60$, c'est-à-dire, $x = -30$. Par cette voie, on aura vu, sans en pouvoir douter, que le quotient de -400 par -10 est $+40$, et que celui de $+300$ par -10 est -30.

LIX.

Théorêmes généraux concernant les signes des quotiens ou des produits.

On aura bientôt après regardé comme des principes généraux que
le $+$ divisé par le $+$ donnoit le $+$,
le $+$ divisé par le $-$ donnoit le $-$,
le $-$ divisé par le $+$ donnoit le $-$,
le $-$ divisé par le $-$ donnoit le $+$,
et de même pour la multiplication.

Ces principes auront été d'autant plus faciles à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les réflexions qu'on avoit dû faire sur les signes qu'on trouvoit aux termes des produits et des quotiens, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication et pour la division des quantités complexes.

Mais s'il est facile qu'on se doute, pour ainsi dire, de ces principes, on sent bien aussi qu'on ne sauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de réflexions, et il y a apparence que les premiers analystes n'en auront été sûrs qu'après les avoir vérifiés dans beaucoup d'exemples.

LX.

On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$, quoique ces quantités ne soient précédées de rien.

Pour nous assurer que la multiplication de $-$ par $-$ doit toujours donner $+$ au produit, voyons quelle lumiere nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée article XLV. Suivant cette méthode, on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a-b$ par une autre $c-d$, doit être $ac-bc-ad+bd$; et on voit par conséquent en même tems que le terme bd qui est venu par la multiplication de b et de d a le signe $+$, tandis que ses produisans b et d ont le signe $-$. Il ne reste donc plus qu'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$ et $-d$ ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or, c'est ce dont il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a-b$ par $c-d$ étoit $ac-bc-ad+bd$, ne spécifiant aucune grandeur particuliere ni à a ni à c, doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro : or, en ce cas, le produit ac

$-bc-ad+bd$ se réduit à $+bd$: donc $-b \times -d = +bd$.

LXI

Les autres cas se démontreroient de même.

Quant aux autres cas, c'est-à-dire, à la multiplication et à la division de + par —, on les justifieroit de la même maniere.

LXII.

Comment la valeur négative qu'on a trouvée résoud le problême.

Pour revenir présentement à notre derniere application du problême précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x = -30$ et $y = +40$, on a dû avoir encore une autre espece d'embarras, c'étoit de savoir ce que signifioit cette valeur de x : pour le découvrir sûrement, le chemin qu'il est vraisemblable qu'on aura tenu, c'est de remonter aux conditions du problême, ou, ce qui revient au même, aux équations $4x + 6y = 120$ et $3x + 7y = 190$ qui les expriment alors, et de voir comment les valeurs -30 et $+40$ de x et de y conviennent à ces équations. On trouve premierement que $4x$ doit être, en ce cas, -120 et que $6y$ est 240, d'où par conséquent $4x + 6y$ est $-120 + 240$, qui est en effet égal à 120. On trouve de même que $3x + 7y$ est $-90 + 280$ qui se réduit à 190.

Voyant donc comment les valeurs -30 et $+40$ de x et de y, satisfont aux équations $4x + 6y = 120$ et $3x + 7y = 190$, on découvre en même temps comment elles satisfont aux conditions du problême ; car puisque l'usage

que l'on fait des quantités $4x$ et $3x$, qui expriment alors les quantités d'eau dépensées par la premiere source, dans la premiere et dans la seconde opération, est de les retrancher de $6y$ et de $7y$, qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la seconde source, il faut que dans ce cas, on regarde la premiere source comme dérobant de l'eau aux réservoirs, au lieu d'en fournir, comme elle faisoit dans l'autre exemple, et comme on l'avoit supposé en exprimant les conditions du problême.

L'on voit, en cette occasion, un exemple de la généralité de l'analyse, qui fait trouver dans une question des cas que l'on n'avoit pas prévu d'abord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du problême.

Dans presque toutes les questions résolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent; et l'on en a toujours conclu, que lorsque la valeur de l'inconnue devenoit négative, la quantité qu'elle exprimoit devoit être prise dans un sens contraire à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du problême.

Il en est de même des connues.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, se doit dire aussi des connues, c'est-à-dire, que dans les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données a, b, etc. dans les problêmes, cela signifiera que dans l'application

particuliere, ces quantités doivent être prises dans un sens contraire à celui suivant lequel on les prenoit dans la solution générale.

LXIV.

Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être, dans le problême précédent, les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant six jours, tandis que la premiere en dérobe pendant trois jours, un réservoir de 180 muids soit rempli; et que la premiere source ensuite fournissant de l'eau pendant trois jours, et la seconde pendant 4 jours, un réservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, et par conséquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$ et $y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = 50$, par lesquelles on apprend que la dépense de la premiere source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la premiere opération, soit pour fournir, ainsi qu'il arrive dans la seconde; et que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette

application, et si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre, en exprimant les conditions du problême, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

LXV.

Pour faciliter aux commençans la maniere d'étendre les solutions des problêmes aux cas où les quantités données sont prises dans un sens contraire à celui où elles avoient été prises d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre problême que le précédent, nous reviendrons au problême de l'art. XXIV, où il s'agit de trouver la rencontre de deux couriers, et nous chercherons à tirer de la solution générale celle du cas suivant.

Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives.

Deux couriers sont à la distance de 50 lieues, l'un étant, par exemple, à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du soir pour aller à Paris en faisant 4 lieues par heure. Le second part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, et fait 3 lieues par heure; on demande à quelle distance de Paris ils se rencontreront.

En comparant cet énoncé avec celui du problême général, on voit d'abord que la lettre c, qui exprimoit la marche du premier courier dans un temps donné, doit être négative, puisque dans la solution générale on supposoit que le premier courier s'éloignoit, et qu'il vient, dans ce cas-ci, au devant du second. On voit ensuite que la lettre b, qui

exprimoit le nombre d'heures d'avance du premier courier, doit être aussi négative, puisqu'il est parti plus tard.

Ainsi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, $a = 50$, $b = -9$ $c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, et l'on aura

$$x = \frac{50 \times 1 \times 5 - 9 \times - 4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1}$$

$= \frac{250 + 108}{3 + 4} = \frac{258}{7} = 36\frac{6}{7}$ qui apprend que lorsque le courier de Paris aura fait $36\frac{6}{7}$ lieues, il aura joint celui de Lille.

LXVI.

Un des usages les plus étendus de l'algebre et qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainsi qu'on vient de faire, les signes des quantités données en général dans les problêmes, c'est de rapporter à la solution des équations qu'on a prises généralement, toutes celles dans lesquelles les inconnues sont disposées de la même maniere, mais avec des signes et des coëfficiens quelconques. Par exemple, avec les deux équations $bx + cy = a$ et $ex + fy = d$ qu'on a résolues dans l'art. LVI, on résoudra toujours deux équations du premier degré quelles qu'elles soient, pourvu qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Deux équations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Qu'on ait, par exemple, à résoudre les deux équations

Exemple.

$$mnx = ppy - hhg \text{ et } mny = p^3 - nnx.$$

Pour les comparer aux premieres, on commencera par les écrire ainsi
$mnx - p^2y = -hhg$ et $nnx + mny = p^3$, les comparant alors terme à terme avec les deux équations

$$bx + cy = a \quad \text{et} \; ex + fy = d,$$

la premiere avec la premiere, et la seconde avec la seconde, on aura
$b = mn, c = -p^2, a = -hhg, e = n^2$
$f = mn, d = p^3$.

Ce qui donnera
$cd = -p^5, af = -mnhhg, ce = -p^2n^2$,
$bf = mmnn, ae = -h^2n^2g, bd = mnp^3$,
et par conséquent $cd - af = -p^5 + mnhhg$,
$ce - bf = -m^2n^2 - p^2n^2$,

$$ae - bd = -h^2n^2g - mnp^3$$

Or, substituant ces valeurs dans les formules générales $x = \frac{cd-af}{ce-bf}$ et $y = \frac{ae-bd}{ce-bf}$, on aura enfin............. $x = \frac{p^5 - mnh^2g}{m^2n^2+p^2n^2}$
et $y = \frac{h^2gn^2+mnp^3}{m^2n^2+p^2n^2}$.

LXVII.

Autre exemple. Supposons présentement qu'on ait les équations

$$\frac{5mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$$

et $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{nq}{p-q}$; en mettant la premiere sous cette forme..............

$$\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{q+p} = -\frac{2nq}{p-q},$$

on aura, en la comparant à l'équation générale, $bx + cy = a$, $b = \frac{3mp}{p-q}$, $c = -\frac{pp}{p+q}$,

a

$a = -\frac{2nq}{p-q}$, et en comparant la seconde à l'équation $ex + fy = d$, on aura

$$e = m, f = p + q, d = \frac{nq}{p-q},$$

et ces valeurs étant substituées dans la formule $x = \frac{cd-af}{ce-bf}$, donneront........................

$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q} \times \frac{qn}{p-q} + \frac{2nq}{p-q} \times \overline{p+q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \overline{p+q}}.$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{2nq \times \overline{p+q}}{p-q}$ par $p + q$, ce qui la change en $\frac{2nq \times \overline{p+q}^2}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$, par ce moyen le numérateur entier de la valeur de x devient $\frac{-pp \times qn + 2nq \times \overline{p+q}^2}{\overline{p-p} \times \overline{p+q}}$,

ou $\frac{qn \times \overline{2 \times \overline{p+q}^2 - pp}}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$,

ou $qn \times \frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p-q} \times \overline{p+q}}$.

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x, en mettant ses deux parties au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{-p^2 \times \overline{p-q} \times m - 3mp \times \overline{p+q}^2}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}},$$

ou $\frac{-mp \times \overline{pp-pq+3 \times \overline{p+q}^2}}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}$, ou enfin.....

$$-\frac{mp \times \overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}.$$

Ces deux opérations changent la valeur précédente de x en $\dfrac{qn \times \dfrac{pp+4pq+2qq}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}{-mp \times \dfrac{4pp+5pq+3qq}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}$; mais comme le numérateur et le dénominateur ~~de cette~~ fraction sont chacun divisés par $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$, j'ôte ce diviseur, et la valeur de x devient

$$\frac{qn \times \overline{pp+4pq+2qq}}{-mp \times \overline{4pp+5pq+3qq}},$$

ou $-\dfrac{qn \times \overline{pp+4pq+2qq}}{mp \times \overline{4pp+5pq+3qq}}$, ou

$-\dfrac{qn}{mp} \times \dfrac{pp+4pq+2qq}{4pp+5pq+3qq}$, ou enfin

$$x = \frac{-nqpp-4pqqn-2nq^3}{4mp^3+5mp^2q+3mpqq}$$

substituant maintenant les mêmes valeurs de a, b, c, etc. dans la formule générale...... $y = \dfrac{ae-bd}{ce-bf}$, on aura..................

$$y = \frac{-\dfrac{2nq}{p-q} \times m - \dfrac{3mp}{p-q} \times \dfrac{nq}{p-q}}{-\dfrac{pp}{p+q} \times m - \dfrac{3mp}{p-q} \times p+q}$$

au numérateur de laquelle je donne cette forme

$$\frac{-2mnq \times (p-q) - 3mpqn}{\overline{p-q}^2}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $-\dfrac{2nqm}{p-q}$ par $p-q$. Je réduis ensuite cette nouvelle forme, et elle devient

$$\frac{mnq \times \overline{-5p+2q}}{\overline{p-q}^2}$$

Quant au dénominateur de la valeur de y, comme il est le même que celui de la valeur de x, il se réduira de même, et l'on aura partant

$$y = \frac{mnq \times \frac{2q - 5p}{p - q}}{-mp \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}},$$

ou en effaçant les diviseurs communs $p - q$ et en réduisant, ...

$$y = \frac{qn \times \frac{\overline{5p - 2q}}{p - q}}{p \times \frac{4pp + 5pq + 3qq}{p + q}}$$ qui,

en faisant passer le diviseur $p + q$ en haut, et le diviseur $p - q$ en bas, suivant les regles des divisions des fractions, devient enfin

$$y = \frac{qn \times \overline{p+q} \times \overline{5p - 2q}}{p \times \overline{p-q} \times \overline{4p^2 + 5pq + 3qq}}$$

$$\text{ou } y = \frac{-2q^3n + 5p^2qn + 3pq^2n}{-2p^2q^2 + 4p^4 + p^3q - 3pq^3}.$$

LXVIII.

Si pour résoudre les équations proposées dans cet exemple, on avoit commencé par délivrer de fractions ces équations, le calcul qu'on auroit fait de la maniere suivante, auroit donné moins d'embarras de la part des diviseurs.

Autre maniere de résoudre le même exemple.

Soient multipliés d'abord les deux membres

de l'équation $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$ ou $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2nq}{p-q}$ par $pp-qq$ produit des deux diviseurs $p-q$, $p+q$, et l'on aura l'équation $\overline{3mpp+3mpq} \times x + \overline{ppq-p^3} \times y = -2npq - 2nqq$.

Soient multipliés de même les deux membres de l'équation $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{nq}{p-q}$ par $p-q$, et l'on aura $\overline{mp-mq} \times x + \overline{pp-qq} \times y = qn$.

Comparant présentement ces deux nouvelles équations avec les deux formules générales, on a $b = 3mpp + 3mpq$, $c = ppq - p^3$, $a = -2npq - 2nq^2$, $e = mp - mq$, $f = p^2 - q^2$, $d = qn$.

D'où l'on tire $cd = p^2q^2n - p^3qn$, $af = -2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4$, $ae = 2nmq^3 - 2nmp^2q$, $bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2$,
$ce = 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2$,
$bf = 3mp^3q + 3mp^4 - 3mpq^3 - 3mp^2q^2$
et partant. . . . .
$cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4$
$ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$
$ae - bd = 2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq^2$
qui donnent. . . . .

$$x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3} \text{ et}$$

$$y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpqq}{2mppqq - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

LXIX.

Comparaison des deux solutions précédentes.

Si on compare présentement ces deux valeurs de x et de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord sans aucune difficulté, l'identité des deux valeurs de y. Quant aux valeurs de x, pour savoir comment la premiere peut être la même chose que la seconde, il faut remarquer que l'égalité qui doit être entre ces deux expressions, suppose nécessairement que le numérateur $qnp^3 + 3nppqq - 2npq^3 - 2nq^4$ de la seconde contienne le numérateur $-qnpp - 4pq^2n - 2q^3n$ de la premiere, de la même maniere que le dénominateur $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ de la seconde contient le dénominateur $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ de la premiere. Or, prenant la peine de diviser le second numérateur par le premier, on trouve en effet le même quotient $p - q$ qu'en divisant le second dénominateur par le premier. C'est-à-dire, que l'expression.........................

$$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

se change en..........................

$$\frac{\overline{p-q} \times \overline{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}}{\overline{p-q} \times \overline{4mp^3q + 5mp^2q + 3mpq^2}}$$

ou en $\frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$ en ôtant les diviseurs communs $p - q$.

LXX.

La maniere dont on vient de réduire la plus

composée des deux valeurs de x à la plus simple, étoit aisée à imaginer, lorsqu'on avoit l'une et l'autre de ces deux expressions; mais si on n'eût connu que la plus composée, et qu'on eût voulu la simplifier, on auroit été beaucoup plus embarrassé, puisqu'on n'auroit pas su par quelle quantité il falloit diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction. Or comme ce seroit un vice dans la solution d'un problême qu'une quantité réductible et non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut se simplifier, ou, ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver, quel est le plus grand diviseur commun que puissent avoir deux quantités données.

Supposons d'abord, pour aller du plus simple au plus composé, que ces deux quantités ne soient que des nombres; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviseur commun des nombres 637 et 143, ou, ce qui revient au même, que l'on se propose de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Divisant d'abord 637 par 143, il vient 4 pour quotient, et 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4+\frac{65}{143}$, d'où la question est réduite à abbaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou, ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 et 65. Car lorsque ce nombre sera trouvé, il est évident qu'il sera

aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637, et 143, puisqu'on ne sauroit réduire la fraction $\frac{65}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même temps $4 + \frac{65}{143}$, ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 et 65, sur lesquels il s'agit d'opérer présentement, étant plus simples que les deux premiers 637 et 143, je vois que la difficulté est diminuée, et qu'en s'y prenant de la même maniere, on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$, non que je prétende que ces fractions soient les mêmes; mais parce qu'on ne sauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même maniere. Ensuite, pour réduire $\frac{143}{65}$, je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, et 13 pour le reste. Il ne faut donc plus par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 et de 65. Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres, sera aussi celui de 143 et de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2 + \frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 et de 65 est 13 lui-même, puisqu'il divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 et de 65, donc il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet, 637 est 49×13 et 143, 11×13, d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$, fraction irréductible.

LXXI.

Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent, peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait, en général, deux nombres A et B, et que le quotient de la division du premier par le second soit a, et le reste C, la question sera réduite à trouver le plus grand commun diviseur de B et de C; b étant supposé alors le quotient de B par C, et D le reste, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviseur de C et de D, c'est-à-dire, de diviser C par D, et de se servir du reste pour diviser D. Allant ainsi de division en division jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres, dont le plus petit soit contenu exactement dans le plus grand; ce nombre contenu exactement, sera le plus grand diviseur commun des deux premiers nombres A et B.

Cette regle, dans toute sa généralité comme dans l'exemple précédent, est fondée sur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a + \frac{C}{B}$ ne sauroit s'abaisser que lorsque $\frac{C}{B}$ s'abaisse, que $\frac{C}{B}$ ne sauroit se réduire que de la même maniere que $\frac{B}{C}$, et que $\frac{B}{C}$ étant $b + \frac{D}{C}$ ne sauroit se réduire sans que $\frac{D}{C}$ se réduise, et ainsi de suite.

LXXII.

Voyons présentement quels sont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités algébriques; et pour plus de clarté, prenons d'abord un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ et $4aa - 5ba + bb$. Il faudroit, suivant la méthode précédente, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde; mais comme la division ne sauroit se faire à cause que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviseur, je multiplie toute la premiere quantité par 4, et je remarque que 4 n'étant point un des diviseurs de la seconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviseur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ et $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ et $4aa - 5ba + bb$.

Je divise alors, suivant les regles précédentes, $12a^3 - 12ba^2 + 4b^2a - 4b^3$ par $4a^2 - 5ba + bb$; j'ai pour quotient $3a$, et pour reste $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, suivant les mêmes regles, demanderoit qu'on divisât $4a^2 - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$; mais comme la division de ces quantités ne sauroit se faire sans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous

les termes de la derniere quantité, et ne l'étant pas à ceux de la seconde, il ne sauroit faire partie du plus grand commun diviseur de ces quantités, ainsi je l'ôte de tous les termes de cette seconde quantité, et je prends à la place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque ensuite qu'en multipliant la premiere quantité $4aa - 5ba + bb$ par 3, qui n'est point un diviseur de $3aa + ba - 4b^2$, la division sera possible; je fais donc cette division de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient, et pour reste $- 19ab + 19bb$.

Il n'est donc plus question présentement que de trouver le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$, et de $- 19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde, et que pour pouvoir diviser les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multiplier la premiere par $19b$, qui est un diviseur exact de la seconde, j'ôte ce diviseur de la seconde, ce qui la réduit à $-a + b$.

Mais le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ et de $-a + b$, est $-a + b$ lui-même, puisque la division de ces deux quantités se fait exactement. Donc $-a + b$ est le plus grand commun diviseur de

$3aa + ba - 4bb$ et de $- 19ab + 19bb$; donc il est aussi le plus grand commun diviseur de $12aa - 15ab + 3bb$ et de $3aa + ba - 4bb$, donc il l'est encore de $4aa - 5ba + bb$,

et de $3\,baa + bba - 4b^3$ aussi bien que de $12\,a^3 - 12\,baa + 4\,bba - 4\,b^3$ et de $4\,aa - 5\,ba + bb$. Donc il est enfin le plus grand diviseur commun des quantités proposées $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ et $4\,aa - 5\,ba + bb$.

LXXIII.

Il n'est pas difficile maintenant de voir qu'on réussiroit à-peu-près de la même maniere, quelles que fussent les quantités dont on voulût trouver les plus grands communs diviseurs. Le seul principe qu'on soit obligé d'ajouter dans cette recherche, à la méthode de l'article LXXI, c'est que deux quantités quelconques A et B conserveront leur plus grand commun diviseur, si on multiplie ou divise l'une de ces deux quantités, A, par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec B.

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviseur des quantités algebriques.

On peut énoncer ainsi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviseurs. Soient A et B les deux quantités proposées, on commencera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra ensuite par quelle quantité m il faudroit multiplier A pour que les termes affectés de la plus haute puissance de la lettre suivant laquelle on l'a ordonnée, puissent se diviser par les termes de B affectés de la plus haute puissance de la même lettre; si ce multiplicateur m n'a aucun commun diviseur avec

B, on s'en servira pour multiplier A; mais s'il a un commun diviseur n, on ôtera ce commun diviseur tant de m que de B, et on ne multipliera A que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité C que l'on prendra à la place de A. On prendra de même à la place de B la quantité D qui en vient lorsqu'on l'a divisé par le diviseur n qu'il a de commun avec m.

Cela fait, on divisera C par D, et la division faite, si elle est exacte, D sera le plus grand commun diviseur cherché de A et de B; mais s'il y a un reste E, on fera, à l'égard de D et de E la même opération qu'à l'égard de A et de B, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui se divisent exactement. Lorsqu'on y sera parvenu, celle de ces deux quantités qui sera contenue exactement dans l'autre, sera le plus grand commun diviseur cherché.

Il est bon de faire remarquer que si, avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on apperçoit dans l'une des quantités proposées A ou B quelque quantité qui en soit un diviseur exact, et qui ne le soit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviseur pour que le calcul soit plus simple.

Afin que les commençans puissent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples suivans.

LXXIV.

Premier exemple.

Soient les quantités
$q n p^3 + 3 n p^2 q^2 - 2 n p q^3 - 2 n q^4$
et $2 m p^2 q^2 - 4 m p^4 - m p^3 q + 3 m p q^3$, dans lesquelles nous n'avons trouvé (article LXIX.) le diviseur commun $p - q$, que parce que nous savions d'avance que la premiere de ces deux quantités, divisée par la seconde, devoit donner le même quotient que la quantité $- n q p^2 - 4 p q^2 n - 2 n q^3$ divisée par $4 m p^3 + 5 m p^2 q + 3 m p q^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter $q n$ qui est commun à tous les termes de la premiere de ces deux quantités, et qui n'est point contenu dans la seconde ; on ôtera de même $p m$ qui est commun à tous les termes de la seconde, sans être contenu dans la premiere ; et par-là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités
$(A) - 4 p^3 - p^2 q + 2 p q^2 + 3 q^3$
et $(B) p^3 + 3 p p q - 2pq^2 - 2 q^3$.

Divisant A par B, j'ai $- 4$ pour quotient, et pour reste (C) $11 p^2 q - 6 p q^2 - 5 q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11 q$, pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, et que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11, et je divise C par q,

d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités (D) $11 p^3 + 33 p^2 q - 22 p q^2 - 22 q^3$, et ($E$) $11 p^2 - 6 p q - 5 q^2$.

Je divise la premiere par la seconde, et j'ai pour quotient p et pour reste (F) $39 p^2 q - 17 p q^2 - 22 q^3$. Comme il faudroit alors multiplier (E) par $39 q$, afin que son premier terme fut divisible par celui de cette nouvelle quantité F, et que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39, et je divise son produit (G) $429 p^2 - 234 p q - 195 q^2$ par (H) $39 p^2 - 17 p q - 22 q^2$. Le quotient est 11, et le reste (I) $- 47 p q + 47 q^2$.

Pour diviser alors H par I, il faudroit multiplier tous ses termes par $47 q$; mais cette quantité est un diviseur de I, je l'ôte donc de I et il me reste $q - p$ pour servir de diviseur à $39 p^2 - 17 p q - 22 q^2$. Or, la division se fait exactement; donc $q - p$ est le plus grand diviseur commun cherché des quantités proposées.

LXXV.

Second exemple.

Soient proposées présentement les deux quantités $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ et $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a, j'ai $2aa + ba - ca - 3bb - 4bc - cc$ et $2aa + 9ca - 5ba - 12bb + 8bc + 4cc$,

ou (A) $2aa + \overline{b - c} \times a - 3bb - 4bc - cc$

et $(B)\ 2aa + \overline{9c - 5b} \times a - 12bb + 8bc + 4cc$.

Divisant la premiere par la seconde, j'ai 1 pour quotient, et pour reste

$(C)\ \overline{6b - 10c} \times a + 9bb - 12bc - 5cc$.

Pour diviser B par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3b - 5c$. Mais avant d'en faire l'opération, je tente la division de C par $3b - 5c$; elle réussit, et donne pour quotient $(D)\ 2a + 3b + c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand commun diviseur de B et de D; mais B est divisible exactement par D; donc D, ou $2a + 3b + c$, est le plus grand commun diviseur cherché de $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ et de $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$. En effet, la premiere de ces deux quantités est le produit de $2a + 3b + c$ par $a - b - c$; la seconde le produit de $2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, et ces deux quantités $a - b - c$ et $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviseur.

LXXVI.

Soient les deux quantités Troisieme exemple.

$$(A)\ \overline{dd - cc} \times a^2 + c^4 - ddcc$$

et $(B)\ 4da^2 - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ ordonnées par rapport à a. Je change d'abord B en $(C)\ 2da^2 - \overline{cc + 2cd} \times a + c^3$, en ôtant de tous ses termes le diviseur 2 qui n'est pas commun avec A. Je multiplie ensuite A par $2d$,

afin de rendre la division possible, ce qui me donne pour quotient $dd - cc$ et pour reste $(D)\ \overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd} \times a - \overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, si on vouloit alors que cette quantité servît de diviseur à C, il faudroit multiplier auparavant C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$, afin que son premier terme permît la division.

Mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ ne seroit point ou un diviseur, ou un multiple de quelque diviseur de D. Pour le savoir, je cherche le plus grand commun diviseur de

$$\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$$

et de $-\overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'est-à-dire, de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ et de $-ddc^3 + c^5 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de suite que la seconde de ces quantités n'est autre chose que le produit de la premiere par $-c$, et partant que la quantité D se réduit au produit de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$ par $a - c$; donc au lieu de multiplier C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$, je divise D par cette quantité, et il vient $(E)\ a - c$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec C; or, $a - c$ divise exactement C, donc $a - c$ est le plus grand diviseur cherché.

LXXVII.

LXXVII.

Au reste, avec un peu d'habitude dans le calcul, on découvre souvent le plus grand commun diviseur de deux quantités plus facilement que par la méthode générale qu'on vient d'expliquer. Par exemple, les deux quantités précédentes $\overline{dd - cc} \times aa + c^4 - ddcc$ et $4daa - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ étant ordonnées par rapport à d, et par conséquent étant sous cette forme $\overline{aa - cc} \times dd + c^4 - aacc$ et $\overline{4aa - 4ac} \times d + 2c^3 - 2c^2a$ il est aisé de découvrir que $aa - cc$ est un diviseur de la premiere, et $c - a$ un diviseur de la seconde. Mais $aa - cc$ est divisible par $c - a$, donc $c - a$ est un diviseur des deux quantités proposées; je les divise donc l'une et l'autre par $c - a$, et j'ai pour leurs quotiens $\overline{cc - dd} \times \overline{c + a}$, et $4ad + 2cc$ qu'on voit assez facilement n'avoir plus de commun diviseur, donc $c - a$, ou $a - c$ étoit le plus grand commun diviseur des quantités proposées.

Autre maniere de résoudre le même exemple.

LXXVIII.

Qu'on se propose maintenant de chercher le plus grand commun diviseur des deux quantités $6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc$ et $9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$, je commence par ôter aa de tous les termes de la premiere, et $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$

Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviseur sans la méthode précédente.

et $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la seconde de ces deux quantités ne contient aucun b, je conclus que si elle a un commun diviseur avec la premiere, il faut qu'elle l'ait séparément avec ses deux parties $6a^3 - 4acc$ et $15a^2b - 10bcc$, et que ces deux parties doivent aussi avoir entr'elles le même commun diviseur. Or, on voit tout de suite que $3aa - 2cc$ est le diviseur commun de ces deux parties; donc il est le plus grand commun diviseur des quantités proposées, si elles en ont un. Le prenant donc pour diviser ces deux quantités, on voit qu'en effet il les divise, et qu'il est par conséquent leur plus grand commun diviseur.

LXXIX.

Lorsqu'il y a trois inconnues dans un problême, il faut trois équations pour le résoudre.

On a vu suffisamment, par ce qui précéde, que pour trouver les deux inconnues que renferme un problême, il faut avoir deux équations. Il n'est pas difficile d'imaginer en partant de-là, que lorsqu'il y aura trois inconnues dans un problême, il faudra trois équations, et ainsi de suite. Quant à la maniere de dégager les inconnues de ces équations, elle ne sera pas difficile non plus à imaginer, après ce qu'on a vu pour celles qui ne renferment que deux inconnues. Car qu'on ait trois équations contenant chacune les trois inconnues x, y, z; si on tire la valeur de x de chacune de ces équations exprimée par le moyen des connues et des deux autres inconnues y, z, de ces équations,

Comment on dégage les inconnues de ces équations

il est évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x, on aura deux nouvelles équations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y et z, et qui seront par conséquent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en seroit de même des équations à quatre, cinq, etc. inconnues.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer, peut offrir des difficultés lorsque l'on en fait usage, nous allons en montrer l'application dans le problême suivant qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les équations du premier degré à trois inconnues.

LXXX.

On sait ce que trois magasins, contenant chacun trois sortes de denrées, ont coûté les uns et les autres séparément; on sait de plus le nombre de mesures que chaque magasin contient de ces trois différentes denrées; on demande à combien revient une mesure de chaque denrée. Problême dans lequel on emploie trois inconnues.

Soient a, b, c, les nombres de mesures de chaque denrée contenue dans le premier magasin, soit d le prix de ce magasin.

Soient de plus e, f, g, les mesures des mêmes denrées contenues dans le second magasin dont le prix est supposé h.

Soient encore i, k, l, les mesures des mêmes denrées contenues dans le troisieme magasin, dont le prix est supposé m.

Soient enfin x, y, z, ce que coûte une mesure de chaque denrée.

Il est évident que la quantité de la premiere denrée contenue dans le magasin d coûtera $a x$, puisque a est le nombre des mesures de cette denrée, et x le prix de la mesure de cette denrée. De même la quantité de la seconde denrée contenue dans le même magasin coûtera $b y$, et la quantité de la troisieme denrée contenue dans le même magasin coûtera $c z$. Ajoutant donc ces trois sommes pour les égaler au prix d de ce magasin, on aura l'équation

$$a x + b y + c z = d;$$

on formera de même les équations

$e x + f y + g z = h$, $i x + k y + l z = m$ en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magasins.

Il est question maintenant de tirer de ces équations les valeurs de x, y, z. Dans cette vue on tirera d'abord la valeur de x de la premiere équation, qui sera $\frac{d - by - cz}{a}$, et égalant cette valeur de x à celle qu'on tire de la seconde équation, on aura l'équation

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{h - fy - gz}{e}.$$

Egalant ensuite la même valeur $\frac{d - by - cz}{a}$ à celle qu'on tire de la troisieme équation, on aura l'équation

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{m - ky - lz}{l}.$$

De la premiere de ces deux équations entre y et z, on tirera

$$de - bey - cez = ah - afy - agz,$$

ou $z = \frac{de - ah + afy - bey}{ce - ag}$.

De la seconde on tirera

$$di - biy - icz = am - aky - alz,$$

ou $z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}$

En égalant ces deux valeurs de z, il est clair qu'on auroit une équation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y, et qu'en résolvant cette équation on connoîtroit y. Comme les calculs que l'on auroit par cette opération seroient assez considérables, je vais faire voir la maniere de les éviter en employant quelques abbréviations, que les premiers analystes, qui ont eu de grands calculs à faire, ont aisément imaginées.

LXXXI.

Ces abréviations consistent à mettre de nouvelles lettres à la place de plusieurs termes composés de connues.

Ma d'abréger calculs pa dénomi tions par es.

Au lieu de ... $de - ah$ je mettrai ... α
de ... $af - be$ .... β
de ... $ce - ag$ .... γ
de ... $di - am$ .... [illegible]
de ... $ak - bi$ .... ε
de ... $ci - al$ .... φ

Par ces nouvelles dénominations les équations précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$ et z

$= \frac{\delta + \epsilon y}{\varphi}$ lesquelles donneront
$\alpha\varphi + \beta\varphi y = \delta\gamma + \gamma\epsilon y$ d'où l'on tire
$y = \frac{\alpha\varphi - \delta\gamma}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}$; substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de z, dans la premiere, par exemple, on aura

$$z = \frac{\alpha + \frac{\beta\alpha\varphi - \beta\gamma\delta}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}}{\gamma}$$

qui se réduit à $z = \frac{\alpha\epsilon - \beta\delta}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}$

Cela fait, on mettra ces valeurs de y et de z dans l'une des valeurs précédentes de x, dans $\frac{d - cz - by}{a}$ par exemple, et l'on aura

$$x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\overline{\alpha\epsilon - \beta\delta}}{\gamma\epsilon - \beta\varphi} - \frac{b}{a} \times \frac{\overline{\alpha\varphi - \delta\gamma}}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{d \times \overline{\gamma\epsilon - \beta\varphi} - c \times \overline{\alpha\epsilon - \beta\delta} - b \times \overline{\alpha\varphi - \delta\gamma}}{a \times \overline{\gamma\epsilon - \beta\varphi}}.$$

LXXXII.

Exemple du problème précédent en nombres.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge et 10 de froment, et qu'il ait coûté 230#.

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge et 12 de froment, et qu'il ait coûté 138#.

Que le troiseme magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment, et qu'il ait coûté 75#. Pour savoir à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge et celle de froment, il faudra faire.

$a = 30$, $b = 20$, $c = 10$, $d = 230$, $e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$, $i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, ce qui donnera $de - ah = \alpha = -690$, $af - be = \beta = -120$, $ce - ag = \gamma = -210$, $di - am = \delta = 50$, $ak - bi = \varepsilon = -50$, $ci - al = \varphi = -20$, substituant ensuite ces valeurs dans les quantités

$$\alpha\varphi - \gamma\delta,\ \gamma\varepsilon - \beta\varphi,\ \alpha\varepsilon - \beta\delta,$$

on aura 24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséqueut

$$y = \frac{24300}{8100} = 3,\ z = \frac{40500}{8100} = 5, \text{ et}$$

$$x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de 4#.
Celui de la mesure d'orge de..........3#.
Et celui de la mesure de froment......5#.

LXXXIII.

Comme les équations du problême précédent sont les plus générales du premier dégré à trois inconnues puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'ensuit que tout problême du premier dégré à trois inconnues, sera renfermé, dans le précédent, aussi-tôt qu'il sera exprimé analytiquement. Pour en donner un exemple, soit proposé le problême suivant.

Tous les problêmes du premier dégré à trois inconnues peuvent, étant mis en équations, être compris dans le problême précédent.

On a trois lingots composés de différens métaux fondus ensemble.

La livre du premier contient..........

.... 7^{onces} d'arg. 3^{onces} de cuiv. 6^{onces} d'ét.,
celle du 2e 12 3 1,
celle du 3e 4 7 5.

On demande ce qu'il faut prendre de chacun de ces lingots pour en former un quatrieme qui contienne
8^{onces} d'arg. 3^{onces} 6^{gros} de cuiv. 4^{onces} 2^{gros} d'étain.

Soient x, y, z les nombres d'onces qu'il faut prendre de chacun de ces lingots.

Il est évident que $\frac{7}{16}x$ sera ce qu'il y aura d'argent dans ce qu'on tirera du premier lingot, que $\frac{12}{16}y$ sera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du second lingot, et que $\frac{4}{16}z$ sera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du troisieme.

Ajoutant donc ces trois quantités, leur somme devra être 8 onces d'argent; donc on a l'équation

$$\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8,$$

ou $7x + 12y + 4z = 128$.

On aura de même pour ce qu'on tirera de cuivre des trois lingots, $\frac{3}{16}x$, $\frac{3}{16}y$ et $\frac{7}{16}z$ dont la somme doit faire 3^{onces} 6^{gros} ou $\frac{15}{4}$^{onces} ce qui donnera $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{15}{4}$, ou $3x + 3y + 7z = 60$.

Ce qu'on tirera d'étain des trois lingots sera pareillement $\frac{6}{16}x$, $\frac{1}{16}y$, $\frac{5}{16}z$ dont la somme doit faire 4^{onces} 2^{gros} ou 4 $\frac{1}{4}$^{onces} donc
$\frac{6}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{5}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$ ou $6x + y + 5z = 68$

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces trois

trois équations, c'est ce qui se fera facilement par les formules précédentes, en posant

$$a = 7 \quad b = 12 \quad c = 4 \quad d = 128,$$
$$e = 3 \quad f = 3 \quad g = 7 \quad h = 60,$$
$$i = 6 \quad k = 1 \quad l = 5 \quad m = 68,$$

par lesquelles on trouvera

$$de - ha = \alpha = -36;\ af - be = \beta = -15;$$
$$ce - ag = \gamma = -37.$$
$$di - am = \delta = 292,\ ak - bi = \varepsilon = -65;$$
$$ci - al = \varphi = -11.$$

Substituant ensuite ces valeurs dans les quantités

$$\alpha\varphi - \gamma\delta,\ \gamma\varepsilon - \beta\varphi,\ \alpha\varepsilon - \beta\delta,$$

on aura 11200, 2240, 6720 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$$y = \frac{11200}{2240} = 5,\ z = \frac{6720}{2240} = 3,\ \text{et}$$
$$x = \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 2240} = 8,$$

c'est-à-dire, qu'il faut prendre 5 onces du premier lingot, 3 onces du second, et 8 du troisieme pour former le lingot demandé.

Fin de la première Partie.

610630



TABLE.

PREMIERE PARTIE.

Digitized by Google

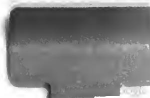
Digitized by Google

Fin de la Table de la premiere Partie.

Digitized by Google

Digitized by Google







Digitized by Google